Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 41 (1995)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FORMES QUADRATIQUES DEVENANT ISOTROPES SUR UNE EXTENSION
Autor: Bayer-Fluckiger, Eva
Kapitel: 4. Extensions finies – le théorème de Springer
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61819

Il suffit de considérer le cas où q est anisotrope. Montrons ce lemme par récurrence sur le nombre de X_i qui interviennent dans f et sur $\deg_{X_1}(f)$. Si f est constant, alors par hypothèse $f \in <D(q)> \subset <D_m(q)>$. Le lemme est donc vrai dans ce cas. Supposons que X_1 intervienne dans f. Le polynôme f divise $q(\phi_1, ..., \phi_n)$, avec $\phi_i \in k[X_1, ..., X_m]$, non tous divisibles par f. Considérons f et les ϕ_i comme des polynômes de $k(X_2, ..., X_m)[X_1]$. Réduisons les ϕ_i modulo f, et notons $\bar{\phi}_i$ les polynômes réduits. Multiplions-les par leur dénominateur commun, lequel est un élément de $k[X_2, ..., X_m]$, et soient $\phi'_1, ..., \phi'_n$ les polynômes de $k[X_1, ..., X_m]$ ainsi obtenus. On a donc

$$fh = q(\phi'_1, ..., \phi'_n)$$

avec $h, \phi'_1, ..., \phi'_n \in k[X_1, ..., X_m]$, et $\deg_{X_1}(\phi'_i) < \deg_{X_1}(f)$. Alors on a aussi $\deg_{X_1}(h) < \deg_{X_1}(f)$. Par hypothèse de récurrence, $h \in <D_m(q)>$. On a donc $f \in <D_m(q)>$.

Démonstration du théorème 1.

a) $\Rightarrow$ *c*): Comme $f \in <D_m(q)>$, le coefficient a du terme de plus haut degré de f est dans $<D(q)>$. L'hypothèse entraîne aussi qu'il existe $x_1, ..., x_s \in k[X_1, ..., X_m]^n$ tels que $q(x_1), ..., q(x_s)$ soient des représentations primitives de q sur $k[X_1, ..., X_m]$, et que l'on ait l'égalité

$$f = af_1 \dots f_r = q(x_1) \dots q(x_s)$$

dans $k(X_1, ..., X_m)^* / k(X_1, ..., X_m)^{*2}$. Comme les polynômes f_i sont irréductibles et distincts, chacun d'entre eux divise l'un des $q(x_j)$. En réduisant x_j modulo f_i, on obtient un zéro non trivial de q sur $k(f_i)$.

c) $\Rightarrow$ *b*): Comme $q_{k(f_i)}$ est isotrope, f_i divise une représentation primitive de q sur $k[X_1, ..., X_m]$. Par le lemme, $f_i \in <D_m(q)>$.

b) $\Rightarrow$ *a*) est trivial.

4. Extensions finies – le théorème de Springer

Soit $m = 1$, et notons $X = X_1$. Le corps $k(f)$ est alors une extension finie de k. Le corollaire du théorème entraîne le théorème de Springer [8]:

Théorème de Springer. *Si une forme quadratique devient isotrope sur une extension de degré impair, alors elle est isotrope.*

En effet, soit E une extension de degré impair de k. Toute extension peut être obtenue comme composée d'extensions monogènes. On peut donc supposer que E est de la forme $E = k(f)$, où f est un polynôme irréductible et unitaire de degré impair. Soit q une forme quadratique anisotrope et représentant 1. Alors tous les polynômes appartenant à $D(q_{k(X)}) = D_1(q)$ sont de degré pair. Donc f n'est pas dans $< D_1(q) >$. Par le corollaire du théorème 1, ceci implique que q n'est pas isotrope sur E.

De même, le théorème 2 entraîne la forme faible du théorème de Springer:

THÉORÈME DE SPRINGER (forme faible). *Si une forme quadratique devient hyperbolique sur une extension de degré impair, alors elle est hyperbolique.*

5. EXTENSIONS FINIES
FORMULATIONS ÉQUIVALENTES DES CRITÈRES DU §2

On suppose encore que $m = 1$. Dans ce cas, on obtient des reformulations intéressantes des critères du §2, en particulier en termes de «principes de normes». Le but de ce paragraphe est de faire remarquer que les théorèmes ci-dessous sont *équivalents*.

Soit q une forme quadratique anisotrope et représentant 1 sur k.

THÉORÈME 3 (cor. du th. 1). *Soit $f \in k[X]$ un polynôme irréductible et unitaire. On a:*

$$q_{k(f)} \text{ est isotrope } \Rightarrow f \in < D(q_{k(X)}) > .$$

THÉORÈME 4 (Théorème de la norme de Knebusch). *Soit E une extension finie de k. Alors on a:*

$$N_{E/k}(< D(q_E) >) \subset < D(q) > .$$

THÉORÈME 5. *Le groupe $< N_{E/k}(E^*) >$ engendré par les normes des extensions finies E de k telles que q_E soit isotrope est contenu dans $< D(q) >$.*

Th. 3 $\Rightarrow$ th. 4: Comme q représente 1 sur k, il existe $a_1, \ldots, a_{n-1} \in k^*$ tels que $q \simeq < 1, a_1, \ldots, a_{n-1} >$. Soit $\alpha \in D(q_E)$. Il existe $x, x_1, \ldots, x_{n-1} \in E$ tels que $\alpha = x^2 + a_1 \cdot x_1^2 + \ldots + a_{n-1} \cdot x_{n-1}^2$. Posons $a = a_1 \cdot x_1^2 + \ldots + a_{n-1} \cdot x_{n-1}^2$. Alors $q_E \simeq < 1, a > \oplus q'$, et $\alpha = x^2 + a$. Posons