Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 41 (1995)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FORMES QUADRATIQUES DEVENANT ISOTROPES SUR UNE

**EXTENSION** 

Autor: Bayer-Fluckiger, Eva

Kapitel: 2. Critères

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-61819

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Pour toute forme quadratique q, on note  $G(q) \subset k^*/k^{*2}$  le groupe des multiplicateurs de similitude de q:

$$G(q) = \{ \alpha \in k^*/k^{*2} \mid \alpha \cdot q \simeq q \}$$
.

Soit  $D(q) \subset k^*/k^{*2}$  l'ensemble des éléments représentés par q, c'està-dire l'ensemble des  $\alpha \in k^*/k^{*2}$  tels qu'il existe  $v \in V$  avec  $q(v) = \alpha$ .

Remarquons que si q représente 1, alors  $G(q) \in D(q)$ .

Soit  $\langle D(q) \rangle$  le sous-groupe de  $k^*/k^{*2}$  engendré par D(q). (Ce groupe est égal au groupe des *normes spinorielles* de q (voir par exemple [4], p. 109), mais cette interprétation ne jouera aucun rôle dans la suite).

Soient  $a_1, ..., a_r \in k^*$ , et posons  $\langle a_1, ..., a_r \rangle = \langle 1, a_1 \rangle \otimes ... \otimes \langle 1, a_r \rangle$ . C'est une forme à  $2^r$  variables, appelée la r-forme de Pfister associée à  $a_1, ..., a_r$ .

Si q est une forme de Pfister, alors  $G(q) = D(q) = \langle D(q) \rangle$  (cf. [7], chap. 2, §10 ou [4], chap. 10, cor. 1.7).

# 2. Critères

Soit  $k[X_1, ..., X_m]$  l'anneau des polynômes à m variables sur k. On ordonne les monômes de  $k[X_1, ..., X_m]$  par l'ordre lexicographique. On dit que  $f \in k[X_1, ..., X_m]$  est *unitaire* si le coefficient du terme de plus haut degré de f est égal à 1.

Si f est irréductible, on note k(f) le corps des fractions de  $k[X_1, ..., X_m]/(f)$ .

Soit q une forme anisotrope de dimension n. On s'intéressera aux extensions E = k(f) de k sur lesquelles q devient isotrope. Si  $q_E$  est isotrope, alors il en est de même de  $\alpha \cdot q_E$ , pour tout  $\alpha \in k^*$ . On peut donc supposer que q représente 1.

Soient 
$$G_m(q) = G(q_{k(X_1, ..., X_m)}), \quad D_m(q) = D(q_{k(X_1, ..., X_m)}),$$
 et  $< D_m(q) > = < D(q_{k(X_1, ..., X_m)}) > .$ 

Le théorème 1 et son corollaire sont des reformulations de résultats de Witt [9]:

THÉORÈME 1. Soit q une forme quadratique anisotrope qui représente 1. Soit  $f \in k[X_1, ..., X_m]$  et soient  $a \in k^*, f_i \in k[X_1, ..., X_m]$  irréductibles, unitaires et distincts tels que  $f = af_1 ... f_r$ .

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- a)  $f \in \langle D_m(q) \rangle$ ;
- b)  $a \in \langle D(q) \rangle$  et  $f_i \in \langle D_m(q) \rangle$  pour tout i = 1, ..., r;
- c)  $a \in \langle D(q) \rangle$  et  $q_{k(f_i)}$  est isotrope pour tout i = 1, ..., r.

En particulier, on a:

COROLLAIRE. Soit  $f \in k[X_1, ..., X_m]$  irréductible et unitaire. Alors  $f \in \langle D_m(q) \rangle$  si et seulement si  $q_{k(f)}$  est isotrope.

Remarquons qu'il y a une forte analogie entre le théorème 1 et le résultat suivant de Knebusch [3]:

THÉORÈME 2. Soit q une forme quadratique anisotrope qui représente 1. Soit  $f \in k[X_1, ..., X_m]$ , et soient  $a \in k^*, f_i \in k[X_1, ..., X_m]$  irréductibles, unitaires et distincts tels que  $f = af_1 ... f_r$ .

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- a)  $f \in G_m(q)$ ;
- b)  $a \in G(q)$  et  $f_i \in G_m(q)$  pour tout i = 1, ..., r;
- c)  $a \in G(q)$  et  $q_{k(f_i)}$  est hyperbolique pour tout i = 1, ..., r.

COROLLAIRE. Soit  $f \in k[X_1, ..., X_m]$  irréductible et unitaire. Alors  $f \in G_m(q)$  si et seulement si  $q_{k(f)}$  est hyperbolique.

Remarque. Si q est une forme de Pfister, alors les théorèmes 1 et 2 sont équivalents. En effet, une forme de Pfister est isotrope si et seulement si elle est hyperbolique (voir par exemple [7], chap. 2, § 10 ou [4], chap. 10, § 1), et les groupes  $G(q_E)$  et  $\langle D(q_E) \rangle$  coïncident pour toute extension E de k.

# 3. Démonstration du théorème 1

Soit  $f \in k[X_1, ..., X_m]$ . On dit que f est normé (par rapport à q) si le coefficient du terme de plus haut degré de f appartient à  $\langle D(q) \rangle$ .

Une représentation primitive de q sur  $k[X_1, ..., X_m]$  est un polynôme de la forme  $q(\phi_1, ..., \phi_n)$ , avec  $\phi_i \in k[X_1, ..., X_m]$  premiers entre eux dans leur ensemble.

LEMME. Soit  $f \in k[X_1, ..., X_m]$  un polynôme irréductible et normé. Supposons que f divise une représentation primitive de q sur  $k[X_1, ..., X_m]$ . Alors  $f \in \langle D_m(q) \rangle$ .