

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 41 (1995)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FORMES QUADRATIQUES DEVENANT ISOTROPES SUR UNE EXTENSION
Autor: Bayer-Fluckiger, Eva
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-61819>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

FORMES QUADRATIQUES DEVENANT ISOTROPES SUR UNE EXTENSION

par Eva BAYER-FLUCKIGER

INTRODUCTION

Soit k un corps de caractéristique $\neq 2$. Soit q une forme quadratique anisotrope sur k . Si E est une extension de k , on note q_E la forme quadratique obtenue par extension des scalaires à E . On dit que q *devient isotrope* sur E si la forme q_E est isotrope.

Soit $k[X_1, \dots, X_m]$ l'anneau des polynômes à m variables sur k . Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ un polynôme irréductible, et notons $k(f)$ le corps des fractions de $k[X_1, \dots, X_m]/(f)$. Le but de cette note est de présenter un critère nécessaire et suffisant pour que q devienne isotrope sur $k(f)$, et d'en donner quelques applications. Sous une forme légèrement différente, ce critère avait été obtenu par Witt [9].

Je remercie T. Y. Lam, A. Merkurjev, A. Pfister et J.-P. Tignol pour leurs remarques sur des versions précédentes de ce travail.

1. RAPPELS ET NOTATIONS (voir [4] ou [7])

Toutes les formes quadratiques considérées sont supposées *non dégénérées*. Pour $a_1, \dots, a_n \in k^*$, on note $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ la forme quadratique $a_1 X_1^2 + \dots + a_n X_n^2$. On dit qu'une forme quadratique $q: V \rightarrow K$ est *isotrope* s'il existe $x \in V$, $x \neq 0$, tel que $q(x) = 0$. Sinon, on dit qu'elle est anisotrope. Par exemple, le *plan hyperbolique* $H = \langle 1, -1 \rangle$ est isotrope.

Si q' et q'' sont deux formes quadratiques, on note $q' \oplus q''$ leur somme orthogonale. On dit que la forme quadratique q *contient* q' s'il existe une forme quadratique q'' telle que $q \simeq q' \oplus q''$.

Si q est isotrope, alors q contient au moins un plan hyperbolique. On dit que q est une *forme hyperbolique* (ou forme neutre) si q est une somme orthogonale de plans hyperboliques.

Pour toute forme quadratique q , on note $G(q) \subset k^*/k^{*2}$ le groupe des multiplicateurs de similitude de q :

$$G(q) = \{\alpha \in k^*/k^{*2} \mid \alpha \cdot q \simeq q\}.$$

Soit $D(q) \subset k^*/k^{*2}$ l'ensemble des éléments représentés par q , c'est-à-dire l'ensemble des $\alpha \in k^*/k^{*2}$ tels qu'il existe $v \in V$ avec $q(v) = \alpha$.

Remarquons que si q représente 1, alors $G(q) \subset D(q)$.

Soit $\langle D(q) \rangle$ le sous-groupe de k^*/k^{*2} engendré par $D(q)$. (Ce groupe est égal au groupe des *normes spinorielles* de q (voir par exemple [4], p. 109), mais cette interprétation ne jouera aucun rôle dans la suite).

Soient $a_1, \dots, a_r \in k^*$, et posons $\ll a_1, \dots, a_r \gg = \langle 1, a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, a_r \rangle$. C'est une forme à 2^r variables, appelée la r -forme de Pfister associée à a_1, \dots, a_r .

Si q est une forme de Pfister, alors $G(q) = D(q) = \langle D(q) \rangle$ (cf. [7], chap. 2, § 10 ou [4], chap. 10, cor. 1.7).

2. CRITÈRES

Soit $k[X_1, \dots, X_m]$ l'anneau des polynômes à m variables sur k . On ordonne les monômes de $k[X_1, \dots, X_m]$ par l'ordre lexicographique. On dit que $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ est *unitaire* si le coefficient du terme de plus haut degré de f est égal à 1.

Si f est irréductible, on note $k(f)$ le corps des fractions de $k[X_1, \dots, X_m]/(f)$.

Soit q une forme anisotrope de dimension n . On s'intéressera aux extensions $E = k(f)$ de k sur lesquelles q devient isotrope. Si q_E est isotrope, alors il en est de même de $\alpha \cdot q_E$, pour tout $\alpha \in k^*$. On peut donc supposer que q *représente* 1.

Soient $G_m(q) = G(q_{k(X_1, \dots, X_m)})$, $D_m(q) = D(q_{k(X_1, \dots, X_m)})$, et $\langle D_m(q) \rangle = \langle D(q_{k(X_1, \dots, X_m)}) \rangle$.

Le théorème 1 et son corollaire sont des reformulations de résultats de Witt [9]:

THÉORÈME 1. *Soit q une forme quadratique anisotrope qui représente 1. Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ et soient $a \in k^*$, $f_i \in k[X_1, \dots, X_m]$ irréductibles, unitaires et distincts tels que $f = a f_1 \dots f_r$.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- a) $f \in \langle D_m(q) \rangle$;
- b) $a \in \langle D(q) \rangle$ et $f_i \in \langle D_m(q) \rangle$ pour tout $i = 1, \dots, r$;
- c) $a \in \langle D(q) \rangle$ et $q_{k(f_i)}$ est isotrope pour tout $i = 1, \dots, r$.

En particulier, on a:

COROLLAIRE. Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ irréductible et unitaire. Alors $f \in \langle D_m(q) \rangle$ si et seulement si $q_{k(f)}$ est isotrope.

Remarquons qu'il y a une forte analogie entre le théorème 1 et le résultat suivant de Knebusch [3]:

THÉORÈME 2. Soit q une forme quadratique anisotrope qui représente 1. Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$, et soient $a \in k^*$, $f_i \in k[X_1, \dots, X_m]$ irréductibles, unitaires et distincts tels que $f = af_1 \dots f_r$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- a) $f \in G_m(q)$;
- b) $a \in G(q)$ et $f_i \in G_m(q)$ pour tout $i = 1, \dots, r$;
- c) $a \in G(q)$ et $q_{k(f_i)}$ est hyperbolique pour tout $i = 1, \dots, r$.

COROLLAIRE. Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ irréductible et unitaire. Alors $f \in G_m(q)$ si et seulement si $q_{k(f)}$ est hyperbolique.

Remarque. Si q est une forme de Pfister, alors les théorèmes 1 et 2 sont équivalents. En effet, une forme de Pfister est isotrope si et seulement si elle est hyperbolique (voir par exemple [7], chap. 2, §10 ou [4], chap. 10, §1), et les groupes $G(q_E)$ et $\langle D(q_E) \rangle$ coïncident pour toute extension E de k .

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$. On dit que f est *normé* (par rapport à q) si le coefficient du terme de plus haut degré de f appartient à $\langle D(q) \rangle$.

Une *représentation primitive* de q sur $k[X_1, \dots, X_m]$ est un polynôme de la forme $q(\phi_1, \dots, \phi_n)$, avec $\phi_i \in k[X_1, \dots, X_m]$ premiers entre eux dans leur ensemble.

LEMME. Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ un polynôme irréductible et normé. Supposons que f divise une représentation primitive de q sur $k[X_1, \dots, X_m]$. Alors $f \in \langle D_m(q) \rangle$.

Il suffit de considérer le cas où q est anisotrope. Montrons ce lemme par récurrence sur le nombre de X_i qui interviennent dans f et sur $\deg_{X_1}(f)$. Si f est constant, alors par hypothèse $f \in \langle D(q) \rangle \subset \langle D_m(q) \rangle$. Le lemme est donc vrai dans ce cas. Supposons que X_1 intervienne dans f . Le polynôme f divise $q(\phi_1, \dots, \phi_n)$, avec $\phi_i \in k[X_1, \dots, X_m]$, non tous divisibles par f . Considérons f et les ϕ_i comme des polynômes de $k(X_2, \dots, X_m)[X_1]$. Réduisons les ϕ_i modulo f , et notons $\bar{\phi}_i$ les polynômes réduits. Multiplions-les par leur dénominateur commun, lequel est un élément de $k[X_2, \dots, X_m]$, et soient ϕ'_1, \dots, ϕ'_n les polynômes de $k[X_1, \dots, X_m]$ ainsi obtenus. On a donc

$$fh = q(\phi'_1, \dots, \phi'_n)$$

avec $h, \phi'_1, \dots, \phi'_n \in k[X_1, \dots, X_m]$, et $\deg_{X_1}(\phi'_i) < \deg_{X_1}(f)$. Alors on a aussi $\deg_{X_1}(h) < \deg_{X_1}(f)$. Par hypothèse de récurrence, $h \in \langle D_m(q) \rangle$. On a donc $f \in \langle D_m(q) \rangle$.

Démonstration du théorème 1.

$a) \Rightarrow c)$: Comme $f \in \langle D_m(q) \rangle$, le coefficient a du terme de plus haut degré de f est dans $\langle D(q) \rangle$. L'hypothèse entraîne aussi qu'il existe $x_1, \dots, x_s \in k[X_1, \dots, X_m]^n$ tels que $q(x_1), \dots, q(x_s)$ soient des représentations primitives de q sur $k[X_1, \dots, X_m]$, et que l'on ait l'égalité

$$f = af_1 \dots f_r = q(x_1) \dots q(x_s)$$

dans $k(X_1, \dots, X_m)^* / k(X_1, \dots, X_m)^{*2}$. Comme les polynômes f_i sont irréductibles et distincts, chacun d'entre eux divise l'un des $q(x_j)$. En réduisant x_j modulo f_i , on obtient un zéro non trivial de q sur $k(f_i)$.

$c) \Rightarrow b)$: Comme $q_{k(f_i)}$ est isotrope, f_i divise une représentation primitive de q sur $k[X_1, \dots, X_m]$. Par le lemme, $f_i \in \langle D_m(q) \rangle$.

$b) \Rightarrow a)$ est trivial.

4. EXTENSIONS FINIES — LE THÉORÈME DE SPRINGER

Soit $m = 1$, et notons $X = X_1$. Le corps $k(f)$ est alors une extension finie de k . Le corollaire du théorème entraîne le théorème de Springer [8]:

THÉORÈME DE SPRINGER. *Si une forme quadratique devient isotrope sur une extension de degré impair, alors elle est isotrope.*

En effet, soit E une extension de degré impair de k . Toute extension peut être obtenue comme composée d'extensions monogènes. On peut donc supposer que E est de la forme $E = k(f)$, où f est un polynôme irréductible et unitaire de degré impair. Soit q une forme quadratique anisotrope et représentant 1. Alors tous les polynômes appartenant à $D(q_{k(X)}) = D_1(q)$ sont de degré pair. Donc f n'est pas dans $\langle D_1(q) \rangle$. Par le corollaire du théorème 1, ceci implique que q n'est pas isotrope sur E .

De même, le théorème 2 entraîne la forme faible du théorème de Springer :

THÉORÈME DE SPRINGER (forme faible). *Si une forme quadratique devient hyperbolique sur une extension de degré impair, alors elle est hyperbolique.*

5. EXTENSIONS FINIES

FORMULATIONS ÉQUIVALENTES DES CRITÈRES DU §2

On suppose encore que $m = 1$. Dans ce cas, on obtient des reformulations intéressantes des critères du §2, en particulier en termes de «principes de normes». Le but de ce paragraphe est de faire remarquer que les théorèmes ci-dessous sont *équivalents*.

Soit q une forme quadratique anisotrope et représentant 1 sur k .

THÉORÈME 3 (cor. du th. 1). *Soit $f \in k[X]$ un polynôme irréductible et unitaire. On a :*

$$q_{k(f)} \text{ est isotrope } \Rightarrow f \in \langle D(q_{k(X)}) \rangle .$$

THÉORÈME 4 (Théorème de la norme de Knebusch). *Soit E une extension finie de k . Alors on a :*

$$N_{E/k}(\langle D(q_E) \rangle) \subset \langle D(q) \rangle .$$

THÉORÈME 5. *Le groupe $\langle N_{E/k}(E^*) \rangle$ engendré par les normes des extensions finies E de k telles que q_E soit isotrope est contenu dans $\langle D(q) \rangle$.*

Th. 3 \Rightarrow th. 4: Comme q représente 1 sur k , il existe $a_1, \dots, a_{n-1} \in k^*$ tels que $q \simeq \langle 1, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$. Soit $\alpha \in D(q_E)$. Il existe $x, x_1, \dots, x_{n-1} \in E$ tels que $\alpha = x^2 + a_1 \cdot x_1^2 + \dots + a_{n-1} \cdot x_{n-1}^2$. Posons $a = a_1 \cdot x_1^2 + \dots + a_{n-1} \cdot x_{n-1}^2$. Alors $q_E \simeq \langle 1, a \rangle \oplus q'$, et $\alpha = x^2 + a$. Posons

$L = E(\sqrt{-a})$. Alors q_L est isotrope. On a soit $L = E$, soit $[L : E] = 2$. Posons $\beta = \alpha$ dans le premier cas, et $\beta = x + \sqrt{-a}$ dans le deuxième. On a alors $N_{L/E}(\beta) = \alpha$. Soit $F = k(\beta)$. Notons $d = [L : F]$. Si d est pair, alors $N_{L/k}(\beta) = N_{F/k}(\beta)^d$ est un carré. Donc $N_{E/k}(\alpha) = N_{L/k}(\beta) \in \langle D(q) \rangle$. Supposons que d soit impair. Comme q_L est isotrope, le théorème de Springer entraîne que q_F est aussi isotrope. Soit $f \in k[X]$ le polynôme minimal de β sur k . Alors $F = k(f)$. On a donc $q_{k(f)}$ isotrope. Par le théorème 3, ceci entraîne $f \in \langle D(q_{k(X)}) \rangle$. Comme q est anisotrope et q_F isotrope, par le théorème de Springer on voit que $[F : k]$ est pair. On a $N_{F/k}(\beta) = (-1)^{[F:k]} f(0) = f(0)$. Comme $f \in \langle D(q_{k(X)}) \rangle$, on a $f(0) \in \langle D(q) \rangle$. Mais $N_{E/k}(\alpha) = N_{L/k}(\beta) = N_{F/k}(\beta)^d = N_{F/k}(\beta) \pmod{k^{*2}}$. Donc $N_{E/k}(\alpha) \in \langle D(q) \rangle$.

Th. 4 \Rightarrow th. 5: Si q_E est isotrope, alors $D(q_E) = E^*/E^{*2}$. Par le théorème 4,

$$N_{E/k}(E^*) = N_{E/k}(\langle D(q_E) \rangle) \subset \langle D(q) \rangle.$$

Th. 5 \Rightarrow th. 3: Soit $f \in k[X]$ un polynôme irréductible et unitaire. Soit $E = k(f)$, et posons $F = k(X)$, $K = E(X)$. Soit θ une racine de f dans E .

Supposons que $q_{k(f)} = q_E$ soit isotrope. Alors q_K est aussi isotrope. On a $X - \theta \in K^*$. Par le théorème 5, on a donc

$$f = N_{K/F}(X - \theta) \in \langle D(q_F) \rangle = \langle D(q_{k(X)}) \rangle.$$

Remarque. Les résultats des deux derniers § montrent que le théorème de la norme de Knebusch entraîne le théorème de Springer. Le fait que ces théorèmes de Knebusch et de Springer sont liés a déjà été remarqué par Witt, dans un manuscrit non publié. Je remercie Ina Kersten de m'avoir signalé l'existence de ce manuscrit de Witt, qui paraîtra dans [10].

Remarque. Avec les hypothèses du théorème 5, on a en fait *égalité* entre $\langle D(q) \rangle$ et le groupe $\langle N_{E/k}(E^*) \rangle$ engendré par les normes des extensions finies de E de k telles que q_E soit isotrope. En effet, il suffit de démontrer que $\langle D(q) \rangle$ est contenu dans le groupe engendré par les $\langle N_{E/k}(E^*) \rangle$. Soit $\alpha \in D(q)$. On peut supposer que $q \simeq \langle 1, a \rangle \oplus q'$, et que $\alpha = x^2 + a \cdot y^2$ avec $x, y \in k$. Posons $E = k(\sqrt{-a})$. Alors q_E est isotrope. Or, $\alpha = N_{E/k}(x + y\sqrt{-a})$. Donc on a bien $\alpha \in N_{E/k}(E^*)$, d'où aussi $\langle D(q) \rangle \subset N_{E/k}(E^*)$.

De manière similaire, on montre que les théorèmes 6, 7 et 8 ci-dessous sont équivalents:

THÉORÈME 6. *Pour toute forme quadratique q sur k anisotrope et représentant 1, et tout polynôme irréductible et unitaire $f \in k[X]$, on a :*

$$q_{k(f)} \text{ est hyperbolique} \Rightarrow f \in G(q_{k(X)}) .$$

THÉORÈME 7 (théorème de la norme de Scharlau). *Pour toute forme quadratique q sur k anisotrope et représentant 1, et toute extension finie E de k , on a :*

$$N_{E/k}(G(q_E)) \subset G(q) .$$

THÉORÈME 8. *Pour toute forme quadratique q sur k anisotrope et représentant 1, $G(q)$ contient le groupe $\langle N_{E/k}(E^*) \rangle$ engendré par les normes des extensions finies E de k telles que q_E soit hyperbolique.*

Remarque. Gille [2] et Merkurjev [5], [6] ont généralisé certains des énoncés étudiés dans ce §.

6. CORPS DE FONCTIONS D'UNE QUADRIQUE

Supposons f homogène de degré 2. Alors f est aussi une forme quadratique. On suppose que $m > 2$ ou $m = 2$ et f anisotrope, ce qui implique que le polynôme $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ est irréductible. Le corps $k(f)$ est appelé le *corps de zéros générique* de la forme quadratique f . C'est aussi le corps des fonctions de la quadrique (affine) correspondante.

Soit q une forme quadratique anisotrope et représentant 1 sur k . Remarquons que l'on a les inclusions suivantes :

$$G_m(q) \subset D_m(q) \subset \langle D_m(q) \rangle .$$

THÉORÈME 9. *Supposons que la forme quadratique f représente 1. Alors on a :*

- a) $q_{k(f)}$ est hyperbolique si et seulement si $f \in G_m(q)$;
- b) q contient f si et seulement si $f \in D_m(q)$;
- c) $q_{k(f)}$ est isotrope si et seulement si $f \in \langle D_m(q) \rangle$.

a) est un cas particulier du corollaire du théorème 2 (voir aussi [4], 4.5.3), b) est le «théorème de la sous-forme» de Pfister (cf. [4], th. 9.2.8), et c) est un cas particulier du corollaire du théorème 1.

Voici une autre démonstration de c). On montre ici que si $q_{k(f)}$ est isotrope, alors $f \in \langle D_m(q) \rangle$, l'autre implication étant facile. Écrivons la

forme quadratique f comme $f \simeq \langle 1 \rangle \oplus f'$. Alors $k(f) = F(\sqrt{-f'(X')})$, où $X' = (X_2, \dots, X_m)$ et $F = k(X')$. Supposons $q_{k(f)}$ isotrope. Alors par [4], 2.5.1, on a:

$$q_F \simeq a \langle 1, f'(X') \rangle \oplus q' \simeq \langle a \rangle \oplus q''.$$

Donc $a \in D(q_F) \subset D_m(q)$.

D'autre part, $\langle 1, f'(X') \rangle$ représente f sur $F(X_1) = k(X_1, \dots, X_m)$. Donc $a \langle 1, f'(X') \rangle$ représente af sur $k(X_1, \dots, X_m)$. On en déduit que $af \in D_m(q)$. Comme $a \in D_m(q)$, on a $f \in \langle D_m(q) \rangle$.

7. APPLICATIONS

Voici quelques applications du théorème 1:

SOMMES DE CARRÉS

COROLLAIRE 1. *Soit s un entier positif. Si un polynôme $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ est une somme de 2^s carrés dans $k(X_1, \dots, X_m)$, alors tout polynôme irréductible et unitaire divisant f avec un exposant impair est une somme de 2^s carrés dans $k(X_1, \dots, X_m)$.*

Soit q la forme quadratique somme de 2^s carrés. Alors q est une forme de Pfister, donc $D(q) = \langle D(q) \rangle$ (cf. [4], chap. 2, § 10 ou [3], chap. 10, cor. 1.7). Le corollaire découle de l'implication $a) \Rightarrow b)$ du théorème 1, appliqué au produit des polynômes irréductibles divisant f avec un exposant impair.

Le cas $m = 1$ de ce corollaire est dû à Kaplansky (cf. [4], chap. 10, cor. 2.10).

PRINCIPE DE HASSE

Soit k un corps de nombres. On note v une place (finie ou infinie) de k , et k_v le complété de k en v . Soit q une forme quadratique anisotrope sur k .

COROLLAIRE 2. *Soit $f \in k[X]$. Alors*

$$f \in \langle D(q_{k_v(X)}) \rangle \text{ pour toute place } v \text{ de } k \Leftrightarrow f \in \langle D(q_{k(X)}) \rangle.$$

Il est clair que $f \in \langle D(q_{k(X)}) \rangle \Rightarrow f \in \langle D(q_{k_v(X)}) \rangle$ pour toute place v de k .

Montrons la réciproque. Par le théorème de Hasse-Minkowski (voir par exemple [4], chap. 6, §6, cor. 6.6a)), si $a \in k$ est tel que $a \in D(q_{k_v})$ pour toute place v de k , alors $a \in D(q)$. Donc, par la partie $a) \Rightarrow b)$ du théorème 1, on peut supposer que f est irréductible et unitaire.

Supposons que $f \in \langle D(q_{k_v(X)}) \rangle$ pour toute place v de k . Alors la partie $b) \Rightarrow c)$ du théorème 1 implique que $q_{k_v(f)}$ est isotrope pour toute place v de k . Par le théorème de Hasse-Minkowski (cf. [4], chap. 6, §6, th. 6.5), on en déduit que $q_{k(f)}$ est isotrope. Donc, par la partie $c) \Rightarrow b)$ du théorème 1, $f \in D(q_{k(X)})$.

UNE VARIANTE DU NOMBRE DE PYTHAGORE

Pour tout corps F et pour tout entier $n \geq 1$, on note $D_F(n) \subset F^*/F^{*2}$ l'ensemble des sommes de n carrés d'éléments de F , et $\langle D_F(n) \rangle$ le sous-groupe de F^*/F^{*2} engendré par $D_F(n)$.

Lorsque $F = k(X_1, \dots, X_m)$, on note $D_m(n) = D_F(n)$.

Rappelons que le *niveau* d'un corps F , noté $s(F)$, est par définition le plus petit entier s tel que $-1 \in D_F(s)$. Si -1 n'est pas une somme de carrés dans F , alors on pose $s(F) = \infty$, et l'on dit que F est *formellement réel*.

COROLLAIRE 3. *Supposons que k soit formellement réel. Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ un polynôme irréductible et unitaire. Alors*

$$f \in \langle D_m(n) \rangle \Leftrightarrow s(k(f)) < n.$$

Soit q la forme quadratique somme de n carrés. Comme k est formellement réel, q est anisotrope. Il est clair que

$$s(k(f)) < n \Leftrightarrow q_{k(f)} \text{ isotrope}.$$

Par le corollaire du théorème 1, on a

$$q_{k(f)} \text{ isotrope} \Leftrightarrow f \in \langle D_m(n) \rangle.$$

Ceci démontre le corollaire.

Soit $D_F(\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_F(n)$. Le *nombre de Pythagore* $p(F)$ de F est le plus petit entier n tel que $D_F(n) = D_F(\infty)$. S'il n'existe aucun entier avec cette propriété, alors on pose $p(F) = \infty$.

Notation. On note $p'(F)$ le plus petit entier n tel que $\langle D_F(n) \rangle = D_F(\infty)$. S'il n'existe aucun entier avec cette propriété, alors on pose $p'(F) = \infty$.

COROLLAIRE 4. Supposons que k soit formellement réel, et que $m \geq 1$. Alors $p'(k(X_1, \dots, X_m)) = \sup\{s(k(f)) + 1, f \in k[X_1, \dots, X_m] \text{ unitaire et irréductible, avec } s(k(f)) < \infty\}$.

Démonstration. Posons

$$p' = p'(k(X_1, \dots, X_m)),$$

$$p'' = \sup\{s(k(f)) + 1, f \in k[X_1, \dots, X_m] \text{ unitaire et irréductible, avec } s(k(f)) < \infty\}.$$

Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ irréductible et unitaire. Si $f \in \langle D_m(n) \rangle$, alors par le corollaire 3 on a $s(k(f)) < n$. Donc $p'' \leq p'$. Réciproquement, si $s(k(f)) < n$ alors par le corollaire 3 $f \in \langle D_m(n) \rangle$ pour tout polynôme irréductible et unitaire de $k[X_1, \dots, X_m]$. Pour montrer que $p' \leq p''$, il reste donc à démontrer que $p'(k) \leq p''$. Soit $d \in k^*$ une somme de carrés, $d \notin k^{*2}$. Posons $f(X) = X^2 + d \in k[X]$. Alors f est un polynôme unitaire et irréductible. On a $k(f) = k(\sqrt{-d})$. Supposons que $s(k(f)) = n$. Alors il existe $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in k$ tels que $-1 = (a_1 + b_1\sqrt{-d})^2 + \dots + (a_n + b_n\sqrt{-d})^2$. Alors $-1 = a_1^2 + \dots + a_n^2 - d(b_1^2 + \dots + b_n^2)$. Donc $d(b_1^2 + \dots + b_n^2) = (a_1^2 + \dots + a_n^2 + 1) \cdot (b_1^2 + \dots + b_n^2)$. Ceci entraîne que $d \in \langle D_k(n+1) \rangle$.

En utilisant des résultats de Colliot-Thélène et Jannsen [1], on obtient

COROLLAIRE 5. Soient k un corps de nombres réel, X, Y et Z des variables. Alors

- a) $p'(k(X)) = 2, 3$ ou 5 ;
- b) $p'(k(X, Y)) = 2, 3$ ou 5 ;
- c) $p'(k(X, Y, Z)) = 2, 3, 5$ ou 9 .

En effet, par [1], th. 4.1, (b) et (c), on voit que $s(k(f)) = 1, 2, 4$ ou ∞ si f est un polynôme irréductible et unitaire de $k[X]$ ou $k[X, Y]$ et $s(k(f)) = 1, 2, 4, 8$ ou ∞ si f est un polynôme irréductible et unitaire de $k[X, Y, Z]$. Par le corollaire précédent, ceci démontre l'affirmation.

Le corollaire ci-dessus et les résultats et conjectures de [1] suggèrent la conjecture suivante:

CONJECTURE. Soit k un corps de nombres réel, et soient X_1, \dots, X_m des variables, $m \geq 4$. Alors $p'(k(X_1, \dots, X_m))$ est de la forme

$$p'(k(X_1, \dots, X_m)) = 2^r + 1,$$

où $r \in \{0, \dots, m\}$.

Finalement, remarquons que le cas des corps de nombres totalement imaginaires est beaucoup plus simple :

PROPOSITION. *Soit k un corps de nombres totalement imaginaire. Alors*

$$p'(k(X_1, \dots, X_m)) = 2, 3 \text{ ou } 5,$$

quel que soit $m \geq 1$.

En effet, si k est totalement imaginaire, alors $s(k) = 1, 2$ ou 4 (voir par exemple [4], chap. XI). Comme tout élément d'un corps de caractéristique différente de 2 peut s'écrire comme différence de deux carrés, on a $p(k(X_1, \dots, X_m)) \leq 5$, quel que soit m . Le lemme suivant montre que si $p(k(X_1, \dots, X_m)) = 4$, alors $p'(k(X_1, \dots, X_m)) \leq 3$. Ceci démontre la proposition.

LEMME. *Soit F un corps de caractéristique différente de 2. Alors*

$$D_F(4) \subset D_F(3) \cdot D_F(3) \subset \langle D_F(3) \rangle.$$

Soit $H = (-1, -1)$ l'algèbre de quaternions de Hamilton sur F . Soit H' le sous-groupe additif des quaternions purs de H . Notons N la norme réduite. Alors $N(H) = D_F(4)$, $N(H') = D_F(3)$. Pour démontrer le lemme, il suffit donc de vérifier que pour tout $a \in H$, il existe $b \in H'$ tel que $ab \in H'$. Mais cette condition consiste en une équation linéaire en trois variables, laquelle a toujours une solution.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] COLLIOT-THÉLÈNE, J.-L. et U. JANNSEN. Sommes de carrés dans les corps de fonctions. *C. R. Acad. Sci. Paris* 312 (1991), 759-762.
- [2] GILLE, Ph. R -équivalence et principe de norme en cohomologie galoisienne. *C. R. Acad. Sci. Paris* 316 (1993), 315-320.
- [3] KNEBUSCH, M. Specialization of quadratic and symmetric bilinear forms, and a norm theorem. *Acta Arithmetica* 24 (1973), 279-299.
- [4] LAM, T. Y. *Algebraic Theory of Quadratic Forms*. Benjamin (1973).
- [5] MERKURJEV, A. Norm principle for algebraic groups. *Journal Algebra and Analysis*, à paraître.
- [6] ——— R -equivalence on adjoint classical groups. Notes manuscrites, octobre 1993.
- [7] SCHARLAU, W. *Quadratic and Hermitian Forms*. Grundlehren Math. Wiss 270, Springer-Verlag (1985).

- [8] SPRINGER, T. Sur les formes quadratiques d'indice zéro. *C. R. Acad. Sci. Paris* 234 (1952), 1517-1519.
- [9] WITT, E. Verschiedene Bemerkungen zur Theorie der quadratischen Formen über einem Körper. *Colloque d'Algèbre Supérieure, Bruxelles* (1956), 245-250.
- [10] ——— Die Sätze von Artin-Springer und Knebusch. *Collected Papers*. Springer-Verlag (à paraître).

(Reçu le 18 avril 1994)

Eva Bayer-Fluckiger

U.R.A. 741 du CNRS
Laboratoire de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Franche-Comté
16, route de Gray
25030 Besançon
France
e-mail: bayer@grenet.fr