Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 41 (1995)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CONCERNING A REAL-VALUED CONTINUOUS FUNCTION ON THE INTERVAL WITH GRAPH OF HAUSDORFF DIMENSION 2

Autor: Wingren, Peter

Bibliographie

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61818

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 23.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Now consider the restrictions of $\tilde{f}(x)$ to all $(p+2)$-generation bands in D_L and D_R, and use the translation properties for G and its derivative g. Then by applying Lemma 2 with $\|g\| = 2^{-2p+2}$, $d > 2^{-2p+1-(p+2)}$, $m(I) = 2^{-n}$ we obtain

$$\mu(D_L \cap Q) + \mu(D_R \cap Q) \leqslant \left(1 + \operatorname{int} \frac{2^{-n}}{2^{-2p+1-(p+2)}}\right) \cdot 2^{-2p+2}. \tag{23}$$

The number of bands from the $(p+1)$ generation contained in D_0 are $2^{-n}/2^{-2p+1}$, and, since $2^p < n$ by (18), we have, for $\alpha < 2$,

$$\begin{aligned} \mu(Q) = \mu(B_0 \cap Q) &\leqslant \frac{2^{-n}}{2^{-2p+1}} \cdot \left(1 + \operatorname{int} \frac{2^{-n}}{2^{-2p+1-(p+2)}}\right) \cdot 2^{-2p+2} \\ &\leqslant 2^{-n} \cdot 2^{-2p+1} + 2^{-2n+p+2} \leqslant (2^{-n})^2 \cdot (1 + 2^{p+2}) \\ &\leqslant (2^{-n})^2 (1 + 4n) \leqslant (2^{-n})^\alpha = |Q|^\alpha \end{aligned} \tag{24}$$

if $1 + 4n \leqslant 2^{n(2-\alpha)}$.

The Mass Distribution Principle now gives (17) and the proof is complete.

Remark. The nowhere-differentiability of the constructed function f is omitted in the statement of the Theorem. However this property can be established by minor changes to the proof in [RHA] or the proof of Theorem 2-9 in [D-W]. The continuity of $f(x)$ follows from uniform convergence of the series (4).

REFERENCES

[B-U] BESICOVICH, A.S. and H.D. URSELL. Sets of fractional dimensions, V: On dimensional numbers of some continuous curves. *Journal of the London Mathematical Society 12* (1937), 18-25.

[D-W] DELIU, A. and P. WINGREN. The Takagi operator, Bernoulli sequences, smoothness conditions and fractal curves. *Proc. Amer. Math. Soc. 121* (1994), 871-881.

[FAL1] FALCONER, K.J. *The Geometry of Fractal Sets.* Cambridge Tracts in Math. 85, Cambridge Univ. Press, 1985.

[FAL2] —— Dimensions – their determination and properties. *Fractal Geometry and Analysis.* (Jacques Belair and Serge Dubuc, editors), Kluwer, 1991, 221-254.

[HAV] HAVIN, V.P. St. Petersburg University, Russia, personal communication.

[M-W] MAULDIN, R.D. and S.C. WILLIAMS. On the Hausdorff dimension of some graphs. *Trans. Amer. Math. Soc. 298* (1986), 793-803.

[P-U] PRZYTYCKI, F. and M. URBANSKI. On the Hausdorff Dimension of some fractal sets. *Studia Mathematica XCIII* (1989), 155-186.

[RHA] de RHAM, G. Sur un exemple de fonction continue sans dérivée. *L'Enseignement Mathématique 3* (1957), 71-72.

[TAK] TAKAGI, T. A simple example of a continuous function without derivative. *Proc. Phys. Math. Soc. Japan 1* (1903), 176-177.

[WAE] van der WAERDEN, B.L. Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion. *Math. Z. 32* (1930), 474-475.

(Reçu le 22 février 1994)

Peter Wingren

Umeå University
Department of Mathematics
S-901 87 Umeå (Sweden)