

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 41 (1995)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** CONCERNING A REAL-VALUED CONTINUOUS FUNCTION ON THE INTERVAL WITH GRAPH OF HAUSDORFF DIMENSION 2  
**Autor:** Wingren, Peter  
**Kapitel:** 1. A Lemma about mass distribution  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61818>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.03.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

constructed by closed dyadic cubes. The graph of a real valued function  $f \in C[0, 1]$  is denoted by  $\text{graph}(f)$ . By a dyadic cube we mean a cube which is the Cartesian product of dyadic intervals. If  $Q$  is an arbitrary dyadic closed cube, then the band of type  $\{(x, y) : (x, z) \in Q \text{ for some } z \in \mathbf{R}\}$  is called a dyadic band. In our construction the dyadic bands of width  $2^{-2^p}$  play a special role. They are called bands of generation  $p, p = 0, 1, 2, \dots$ .

*Acknowledgement.* We would like to thank the referee for helpful suggestions.

### 1. A LEMMA ABOUT MASS DISTRIBUTION

By a mass distribution on a subset  $A$  of  $\mathbf{R}^2$  we mean a measure  $\mu$  on  $A$  such that  $0 < \mu(A) < \infty$ .

LEMMA 1. *Let  $f$  be a real valued measurable function defined on  $[0, 1]$ . Then there is a mass distribution  $\mu$  on  $F := \text{graph}(f)$  such that*

1) *for any two subintervals  $I$  and  $I'$  of  $[0, 1]$ , with  $m(I) = m(I')$ ,*

$$\mu(I \times \mathbf{R}) = \mu(I' \times \mathbf{R})$$

*and*

2) *if for two Borel sets  $B_1$  and  $B_2$  in  $[0, 1] \times \mathbf{R}$  there exists  $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$  such that*

$$B_1 \cap F + (x_0, y_0) = B_2 \cap F$$

*then*

$$\mu(B_1) = \mu(B_2).$$

*Proof.* Let  $B$  be an arbitrary Borel set in  $\mathbf{R}^2$ . Define

$$(5) \quad \mu(B) = m(\tilde{f}^{-1}(B)).$$

Then it is obvious that  $\mu$  is a mass distribution on  $\text{graph}(f)$  and 1) and 2) follow from the translation invariance of the Lebesgue measure.

### 2. A LEMMA ABOUT MASS DISTRIBUTION AND SUCCESSIVE TRANSLATIONS

LEMMA 2. *Let  $g(y) \geq 0$  and  $g(y) \in L^1(\mathbf{R})$ . If  $I$  is a finite interval and  $d$  is a positive real number then*

$$(6) \quad \int_I \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(y - nd) dy < \left(1 + \text{int} \frac{m(I)}{d}\right) \cdot \|g\|.$$