

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 41 (1995)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CONCERNING A REAL-VALUED CONTINUOUS FUNCTION ON THE INTERVAL WITH GRAPH OF HAUSDORFF DIMENSION 2
Autor: Wingren, Peter
Kurzfassung
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-61818>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 04.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

CONCERNING A REAL-VALUED CONTINUOUS FUNCTION
ON THE INTERVAL WITH GRAPH OF HAUSDORFF DIMENSION 2

by Peter WINGREN

ABSTRACT. A real-valued continuous nowhere-differentiable function on $[0, 1]$ is constructed. Its graph F is proved to have the following property. If B is a Borel subset of F and if the projection of B on $[0, 1]$ has positive Lebesgue measure, then the Hausdorff dimension of B is two.

0. INTRODUCTION

In 1903 Takagi [TAK, p. 176] gave an extremely simple construction of a nowhere differentiable real-valued continuous function on $[0, 1]$. Takagi's construction is

$$(1) \quad T(x) = \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p} \operatorname{dist}(2^p x, \mathbf{Z})$$

where each term is a scaled version of the sawtooth function

$$(2) \quad \operatorname{dist}(x, \mathbf{Z}) := \inf \{ |x - y| : y \in \mathbf{Z} \} .$$

Later, in 1930, van der Waerden [WAE] gave a similar example, which de Rham [RHA], in 1957, improved to an example identical with Takagi's.

It follows from a proof of Mauldin and Williams [M-W, pp. 795-797] that the graph of the Takagi function has a σ -finite linear Hausdorff measure and hence is of Hausdorff dimension 1.

In 1937 Besicovitch and Ursell [B-U, p. 29] constructed for an arbitrary α , $1 < \alpha < 2$, a real-valued nowhere-differentiable function in $C[0, 1]$ with graph of Hausdorff dimension α . They too used the sawtooth function $\operatorname{dist}(x, \mathbf{Z})$ as a building block in their construction.

In this paper we construct a real valued continuous function $f(x)$, $x \in [0, 1]$, whose graph has an optimal property with respect to Hausdorff dimension and measure.