**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 41 (1995)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** STRUCTURE CONFORME AU BORD ET FLOT GÉODÉSIQUE D'UN CAT(- 1)-ESPACE

**Autor:** Bourdon, Marc

**Kapitel:** 2.11. Preuve du théorème 2.0.1.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-61817

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 23.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

Le paramétrage de Hopf permet d'identifier $G\Lambda$ à $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$. Soit alors $\tilde{m}$ la mesure sur $G\Lambda$ définie par:

$$\tilde{m} = \mu \times dt .$$

C'est une mesure de Radon. $\Gamma$-invariante et $\Phi_T$-invariante. La mesure $m$, restriction de $\tilde{m}$ au compact $\mathscr{E}$, (considéré comme un domaine fondamental de $\Gamma$ dans $G\Lambda$), est finie et $\Phi_T$-invariante. On a:

2.10.2. THÉORÈME. *$\Phi_T$ est ergodique sur $(\mathscr{E}, m)$.*

La preuve de ce théorème est mot pour mot la preuve classique de Hopf [Ho]. Le point essentiel est que $\mu$ s'écrive comme un produit de deux mesures sur $\Lambda$.

Clairement, l'ergodicité de $\Phi_T$ sur $(\mathscr{E}, m)$ est équivalente à celle de $\Gamma$ sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$. Puisque $\mu$ et $\nu_x \times \nu_x$ sont absolument continues, l'ergodicité de $\Gamma$ sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$ entraîne l'ergodicité de $\Gamma$ sur $(\Lambda, \nu_x)$. D'où,

2.10.3. COROLLAIRE. *L'action de $\Gamma$ est ergodique sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$ et sur $(\Lambda, \nu_x)$.*

Notons respectivement $h$ et $h_m$, l'entropie topologique de $\Phi_T$ et l'entropie mesurable de $(\Phi_T, m)$. Elles se calculent comme dans le cas convexe cocompact (voir [Su2], p. 275-276, [K]). On obtient:

2.10.4. THÉORÈME. *$h = h_m = \tau$. Ainsi $m$ maximise l'entropie mesurable.*

2.11. PREUVE DU THÉORÈME 2.0.1.

Nous renvoyons à l'introduction pour les notations. Nous montrons d'abord deux lemmes:

Soient $x_1, x_2$ des origines respectivement de $X_1$ et $X_2$. Notons $d_1$ et $d_2$ les métriques $d_{x_1}$ et $d_{x_2}$ sur $\Lambda_1$ et $\Lambda_2$.

2.11.1. LEMME. *Supposons que l'application $\Omega : (\Lambda_1, d_1) \to (\Lambda_2, d_2)$ soit conforme. Alors, son facteur conforme $\omega$ est continu sur $\Lambda_1$.*

2.11.2. *Preuve de 2.11.1.* Puisque $\Omega$ est conforme, les ensembles limites $\Lambda_1$ et $\Lambda_2$ ont même dimension de Hausdorff $\tau$. De plus, en notant $\nu_1$ et $\nu_2$ les $\tau$-mesures de Hausdorff de $(\Lambda_1, d_1)$ et $(\Lambda_2, d_2)$, on a:

$$\Omega^* \nu_2 = \omega^\tau \nu_1 . \tag{1}$$

Soit $\mu_1$ et $\mu_2$ les mesures sur $\Lambda_1 \times \Lambda_1 - \Delta$ et $\Lambda_2 \times \Lambda_2 - \Delta$, définies par la relation 2.10.1. D'après l'égalité (1), la mesure:

$$(\Omega \times \Omega)^* \mu_2$$

est absolument continue par rapport à $\mu_1$. De plus, $\mu_2$ est $\Gamma$-invariante et $\Omega$ est $\Gamma$-équivariant, donc $(\Omega \times \Omega)^* \mu_2$ est $\Gamma$-invariante. Alors, puisque l'action de $\Gamma$ est ergodique sur $(\Lambda_1 \times \Lambda_1 - \Delta, \mu_1)$ (corollaire 2.10.3), les mesures $(\Omega \times \Omega)^* \mu_2$ et $\mu_1$ sont égales à une constante près. Donc, à une constante près leurs densités par rapport à $\nu_1 \times \nu_1$ sont presque sûrement égales. D'où $\nu_1 \times \nu_1$-presque sûrement:

$$\frac{\omega^\tau(\xi)\omega^\tau(\xi')}{[d_1(\xi, \xi')]^{2\tau}} = \frac{\text{Cste}}{[d_2(\Omega(\xi), \Omega(\xi'))]^{2\tau}},$$

soit encore

$$[d_2(\Omega(\xi), \Omega(\xi'))]^2 = (\text{Cste})^{1/\tau} \omega(\xi)\omega(\xi') \, [d_1(\xi, \xi')]^2 .$$

L'application $\Omega: (\Lambda_1, d_1) \to (\Lambda_2, d_2)$ étant continue, $\omega$ l'est également. Notons qu'en faisant tendre $\xi'$ vers $\xi$, on trouve Cste $= 1$. $\square$

Soit maintenant $s_i$ l'involution de $G\Lambda_i$ définie par:

$$s_i(\gamma) = \gamma' \quad \text{avec} \quad \gamma'(t) = \gamma(-t) .$$

Par passage au quotient on obtient une involution de $\mathscr{E}_i$ que l'on notera encore $s_i$.

2.11.3. LEMME. *Supposons que l'homéomorphisme* $G: \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_2$ *conjugue les flots géodésiques. Quitte à remplacer* $G$ *par* $G' = \Phi_{T_0} \circ G$ *pour un certain réel* $T_0$, *on peut supposer:*

$$G \circ s_1 = s_2 \circ G .$$

2.11.4. *Preuve de 2.11.3.* Soit $T$ la fonction sur $\mathscr{E}_1$ dans $\mathbf{R}$, définie de la manière suivante: Etant donné $\gamma \in \mathscr{E}_1$, $T(\gamma)$ est l'unique réel vérifiant:

$$\Phi_{T(\gamma)}(G \circ s_1(\gamma)) = s_2 \circ \Phi_{T(\gamma)}(G(\gamma)) . \tag{1}$$

La fonction $T$ est continue et invariante par le flot de $\mathscr{E}_1$. Aussi elle est constante (par l'ergodicité du flot sur $(\mathscr{E}_1, m_1)$; (théorème 2.10.2)). Notons $T_0$ la valeur constante de $T$, et $G'$ l'application $\Phi_{T_0} \circ G$. D'après (1), on a:

$$G' \circ s_1 = s_2 \circ G' . \quad \square$$

2.11.5. *Preuve de 2.0.1.* Montrons (i) ⇒ (ii).

Soit $g \in \Gamma$. Notons respectivement $|g'|_1$ et $|g'|_2$, le facteur conforme de $g$ sur $(\Lambda_1, d_1)$ et $(\Lambda_2, d_2)$. En écrivant:

$$\Omega \circ g = g \circ \Omega .$$

et en calculant le facteur conforme des deux membres, on obtient:

$$(\omega \circ g)\,|g'|_1 = (|g'|_2 \circ \Omega)\omega . \tag{1}$$

Construisons maintenant notre conjugaison: Paramétrons $G\Lambda_1$ et $G\Lambda_2$ comme au paragraphe 2.9, en choisissant pour origines les points $x_1$ et $x_2$. Définissons une application $\tilde{G}$ de $G\Lambda_1$ dans $G\Lambda_2$, par:

$$\tilde{G}(\xi_-, \xi_+, t) = (\Omega(\xi_-), \Omega(\xi_+), t - \log\omega(\xi_+)) .$$

D'après le lemme 2.11.1, $\omega$ est continue, donc $\tilde{G}$ est un homéomorphisme. D'après la relation 2.9.2, il conjugue les flots de $G\Lambda_1$ et $G\Lambda_2$. De plus, quel que soit $g \in \Gamma$, il vérifie:

$$\tilde{G} \circ g = g \circ \tilde{G} . \tag{2}$$

En effet, d'après 2.9.4 on a:

$$\begin{aligned}&(\tilde{G} \circ g)\,(\xi_-, \xi_+, t)\\ &= (\Omega \circ g(\xi_-), \Omega \circ g(\xi_+), t - B_{\xi_+}(x_1, g^{-1}x_1) - \log\omega \circ g(\xi_+))\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&(g \circ \tilde{G})\,(\xi_-, \xi_+, t)\\ &= (g \circ \Omega(\xi_-), g \circ \Omega(\xi_+), t - \log\omega(\xi_+) - B_{\Omega(\xi_+)}(x_2, g^{-1}x_2)) .\end{aligned}$$

Or d'après le corollaire 2.6.3,

$$B_{\xi_+}(x_1, g^{-1}x_1) = \log|g'(\xi_+)|_1$$

et

$$B_{\Omega(\xi_+)}(x_2, g^{-1}x_2) = \log(|g'|_2 \circ \Omega(\xi_+)) .$$

Ainsi l'égalité (2) provient de (1) et de la $\Gamma$-équivariance de $\Omega$. Grâce à (2), on obtient une conjugaison des flots de $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$. Par construction, elle induit l'application $F$ entre $\mathscr{O}_1$ et $\mathscr{O}_2$.

Montrons (ii) ⇒ (i).

Soit $G\colon \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_2$ une conjugaison des flots, qui induit l'application $F$ entre $\mathscr{O}_1$ et $\mathscr{O}_2$. D'après le lemme 2.11.3, on peut supposer:

(3) $$G \circ s_1 = s_2 \circ G .$$

Relevons la conjugaison $G$ à $G\Lambda_1$ et $G\Lambda_2$ de la manière suivante: Soit $\pi_i$ la projection de $G\Lambda_i$ sur $\mathscr{E}_i$. Pour $\gamma: \mathbf{R} \to X_1$ appartenant à $G\Lambda_1$, soit $\gamma': \mathbf{R} \to X_2$, un élément de $G\Lambda_2$ vérifiant:

$$\gamma'(-\infty) = \Omega(\gamma(-\infty)), \quad \gamma'(+\infty) = \Omega(\gamma(+\infty))$$

et

$$\pi_2(\gamma') = G(\pi_1(\gamma)) .$$

Notons que $\gamma'$ existe puisque $G$ induit $F$ entre $\mathscr{O}_1$ et $\mathscr{O}_2$. De plus, si $\pi_1(\gamma)$ n'appartient à aucune orbite périodique de $\mathscr{E}_1$, $\gamma'$ est unique. On obtient ainsi une application

$$\begin{aligned} \tilde{G}: G\Lambda_1 &\to G\Lambda_2 \\ \gamma &\mapsto \gamma' \end{aligned}$$

définie sauf sur les relevés des orbites périodiques, qui conjugue les flots, vérifie:

$$G \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \tilde{G} .$$

ainsi que, d'après ( 3):

(4) $$\tilde{G} \circ s_1 = s_2 \circ \tilde{G} .$$

Paramétrons $G\Lambda_1$ et $G\Lambda_2$ comme au paragraphe 2.9, en choisissant les points $x_1$ et $x_2$ comme origines. Puisque $G$ est une conjugaison continue entre les compacts $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$, elle est uniformément continue. Aussi elle envoie sous-ensembles fortement stables sur sous-ensembles fortement stables. D'après sa définition et la proposition 2.8.6, $\tilde{G}$ a la même propriété. Aussi, d'après 2.9.3, $\tilde{G}$ s'écrit en coordonnées:

$$\tilde{G}(\xi_-, \xi_+, t) = (\Omega(\xi_-), \Omega(\xi_+), t - \log \omega(\xi_+)) ,$$

pour une certaine fonction $\omega$ de $\Lambda_1$ dans $]0, +\infty[$. Notons que ceci permet de définir $\tilde{G}$ sur $G\Lambda_1$ tout entier.

Comparons maintenant les métriques $d_1 = d_{x_1}$ et $d_2 = d_{x_2}$ sur $\Lambda_1$ et $\Lambda_2$: Soit $\xi$ et $\xi'$ deux points distincts de $\Lambda_1$, et $p$ appartenant à $(\xi\xi')$. Soit $\gamma$ l'élément de $G\Lambda_1$, vérifiant:

$$\gamma(-\infty) = \xi, \ \gamma(+\infty) = \xi' \quad \text{et} \quad \gamma(0) = p .$$

Les points $\tilde{G}(\gamma)(0)$ et $\tilde{G}(s_1(\gamma))(0)$ appartiennent à la géodésique $(\Omega(\xi)\Omega(\xi'))$ de $X_2$. D'après (4) ils sont égaux. Notons-les $q$. En coordonnées on a:

$$\gamma = (\xi, \xi', B_{\xi'}(x_1, p))$$

et

$$s_1(\gamma) = (\xi', \xi, B_{\xi}(x_1, p)) .$$

D'où:

$$\tilde{G}(\gamma) = (\Omega(\xi), \Omega(\xi'), B_{\xi'}(x_1, p) - \log \omega(\xi'))$$

et

$$\tilde{G}(s_1(\gamma)) = (\Omega(\xi'), \Omega(\xi), B_{\xi}(x_1, p) - \log \omega(\xi))$$

donc

$$(5) \qquad B_{\Omega(\xi')}(x_2, q) = B_{\Omega(\xi')}(x_2, \tilde{G}(\gamma)(0)) = B_{\xi'}(x_1, p) - \log \omega(\xi')$$

et

$$(6) \qquad B_{\Omega(\xi)}(x_2, q) = B_{\Omega(\xi)}(x_2, \tilde{G}(s_1(\gamma))(0)) = B_{\xi}(x_1, p) - \log \omega(\xi) .$$

Ainsi (5) et (6) donnent:

$$[d_2(\Omega(\xi), \Omega(\xi'))]^2 = \omega(\xi)\omega(\xi') \, [d_1(\xi, \xi')]^2 .$$

Puisque l'application $\Omega$ de $(\Lambda_1, d_1)$ sur $(\Lambda_2, d_2)$ est continue, $\omega$ l'est également. Alors, en faisant tendre $\xi'$ vers $\xi$, $\Omega$ est conforme de facteur conforme $\omega$. $\square$

## RÉFÉRENCES


[Be] BENAKLI, N. *Polyèdres hyperboliques, passage du local au global.* Thèse, Université de Paris-Sud, 1992.

[Bea] BEARDON, A.F. *The geometry of discrete groups.* G.T.M. 91, Springer, 1983.

[Ber] BERGER, M. *Géométrie, Vol. 3.* Cedric Nathan, 1978.

[C] COORNAERT, M. Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de M. Gromov. *Pacific J. of Math. 159* (1993), 241-270.

[C-D-P] —— T. DELZANT et A. PAPADOPOULOS. *Géométrie et théorie des groupes, les groupes hyperboliques de Gromov.* Lecture Notes in Math. 1441. Springer, 1990.

[C-E-H-P-T] CANNON, J.W., D.B.A. EPSTEIN, D.F. HOLT, M.S. PATERSON et W.P. THURSTON. *Word processing and group theory.* Bartlett and Jones, Boston, 1992.