Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 41 (1995)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: STRUCTURE CONFORME AU BORD ET FLOT GÉODÉSIQUE D'UN CAT(- 1)-ESPACE

Autor: Bourdon, Marc

Kapitel: 2.9. Le paramétrage de Hopf de E, Φ_T

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61817

$$(2.8.5)\quad \begin{aligned} W^{ss}(\gamma) &= \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(0) \in H_{\gamma(0),\gamma(+\infty)}, \eta(+\infty) = \gamma(+\infty)\} \\ W^{uu}(\gamma) &= \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(0) \in H_{\gamma(0),\gamma(-\infty)}, \eta(-\infty) = \gamma(-\infty)\}\,. \end{aligned}$$

Observons qu'ils sont canoniquement homéomorphes à Λ privé d'un point. On définit les sous-ensembles fortement stables et instables de $(\mathscr{E}, \Phi_T)$ par:

2.8.6. DÉFINITION. *Soit π la projection de $G\Lambda$ sur $\mathscr{E}$, alors:*

$$W^{ss}(\pi(\gamma)) = \pi(W^{ss}(\gamma))$$
$$W^{uu}(\pi(\gamma)) = \pi(W^{uu}(\gamma))\,.$$

Le sous-ensemble faiblement stable (resp. instable) de $G\Lambda$ en γ, est la réunion des sous-ensembles fortement stables (resp. instables), le long de l'orbite de γ sous Φ_T. En d'autres termes:

$$W^{s}(\gamma) = \bigcup_{T\in\mathbf{R}} W^{ss}(\Phi_T(\gamma)) = \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(+\infty) = \gamma(+\infty)\}$$
$$W^{u}(\gamma) = \bigcup_{T\in\mathbf{R}} W^{uu}(\Phi_T(\gamma)) = \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(-\infty) = \gamma(-\infty)\}\,.$$

De même, sont définis les sous-ensembles faiblement stables et instables de $\mathscr{E}$. D'après la définition 2.8.6, ils sont correspondance avec ceux de $G\Lambda$, via la projection de $G\Lambda$ sur $\mathscr{E}$.

2.9. LE PARAMÉTRAGE DE HOPF DE $(\mathscr{E}, \Phi_T)$

Choisissons une origine x dans X. Soit Δ la diagonale de $\Lambda \times \Lambda$. On définit une application de $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$ dans $G\Lambda$, de la manière suivante: à

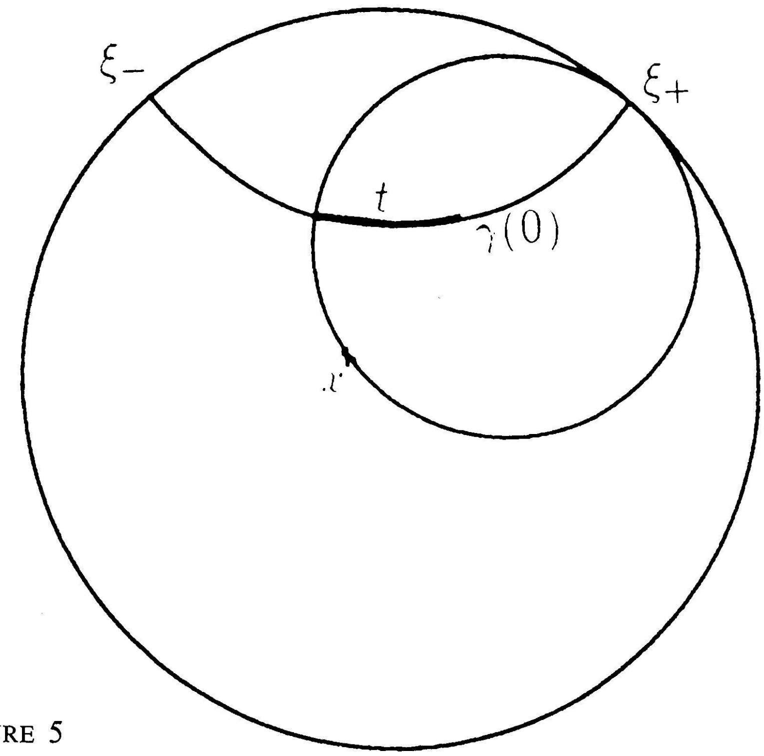

FIGURE 5

l'élément (ξ_-, ξ_+, t) de $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$, associons l'unique élément γ de $G\Lambda$ vérifiant (voir figure 5):

$$\gamma(-\infty) = \xi_-, \gamma(+\infty) = \xi_+, B_{\xi_+}(x, \gamma(0)) = t \,. \tag{2.9.1}$$

Le lecteur vérifiera aisément que l'application ainsi définie est un homéomorphisme. Notons que dans ces coordonnées Φ_T s'écrit:

$$\Phi_T(\xi_-, \xi_+, t) = (\xi_-, \xi_+, t + T) \,. \tag{2.9.2}$$

Notons également que les sous-ensembles fortement stables du flot ont pour coordonnées (voir 2.8.5):

$$\{(\xi_-, \xi_+, t), \ \xi_- \in \Lambda - \{\xi_+\}\} \,. \tag{2.9.3}$$

Par ailleurs, en coordonnées l'action de Γ s'écrit:

$$g(\xi_-, \xi_+, t) = (g\xi_-, g\xi_+, t - B_{\xi_+}(x, g^{-1}x)) \,. \tag{2.9.4}$$

Aussi, on obtient un homéomorphisme:

$$(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}/_\sim \to \mathscr{E} \tag{2.9.5}$$

en définissant la relation d'équivalence suivante sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$:

$$(\xi_-, \xi_+, t) \sim (\xi'_-, \xi'_+, t')$$

si et seulement si, il existe $g \in \Gamma$ tel que:

$$\xi'_- = g\xi_-, \xi'_+ = g\xi_+, t' = t - B_{\xi_+}(x, g^{-1}x) \,.$$

2.10. Mesure d'entropie maximale

On rappelle ici une construction de la mesure d'entropie maximale du flot géodésique, due à D. Sullivan ([Su], [Su2]), dans le cas des groupes convexes cocompacts d'isométries de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$, puis généralisée par V. Kaimanovich [K].

Soit x un élément de X, et soit respectivement τ et ν_x la dimension et la mesure de Hausdorff de (Λ, d_x) (voir 2.7). La mesure:

$$\mu = \frac{\nu_x \times \nu_x}{[d_x(\xi, \xi')]^{2\tau}} \tag{2.10.1}$$

est une mesure de Radon sur $\Lambda \times \Lambda - \Delta$. Elle est indépendante de x et Γ-invariante. En effet $\{\nu_x, \nu \in X\}$ est une mesure τ-conforme (voir 2.7.4), de plus d'après 2.4.2 et 2.7.1:

$$d_y(\xi, \xi') = d_x(\xi, \xi') \, [p(x, y, \xi) p(x, y, \xi')]^{1/2} \,.$$