

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 41 (1995)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** STRUCTURE CONFORME AU BORD ET FLOT GÉODÉSIQUE D'UN CAT(- 1)-ESPACE  
**Autor:** Bourdon, Marc  
**Kapitel:** 2.8. Flot géodésique associé à une action quasi-convexe  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61817>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 01.05.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

2.7.5. THÉORÈME.

a) La dimension  $\tau$  est égale au taux de croissance de  $\Gamma$  dans  $X$ .  
C'est-à-dire:

$$\tau = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \# \{g \in \Gamma \mid |x - gx|_X \leq n\}.$$

b) La  $\nu_x$ -mesure d'une boule de  $(\Lambda, d_x)$ , est proportionnelle à son rayon à la puissance  $\tau$ . Autrement dit: il existe une constante  $C_x \geq 1$ , telle que pour toute boule  $B(\xi, r)$  centrée sur  $\Lambda$ , on ait:

$$C_x^{-1} r^\tau \leq \nu_x(B(\xi, r)) \leq C_x r^\tau.$$

Rappelons les principales étapes de la démonstration de ces résultats:

Soit  $\alpha_0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \# \{g \in \Gamma \mid |x - gx|_X \leq n\}$ . S. J. Patterson a exhibé une mesure  $\alpha_0$ -conforme (voir par exemple [Su], p. 175). D'autre part d'après D. Sullivan, si  $\{\mu_x, x \in X\}$  est une  $\alpha$ -mesure conforme, alors la  $\mu_x$  mesure d'une boule de  $\Lambda$  est proportionnelle à son rayon à la puissance  $\alpha$  (c'est le lemme de l'ombre [Su], p. 180). Dès lors par un principe général,  $\alpha$  (et en particulier  $\alpha_0$ ) est égal à  $\tau$ , les mesures  $\mu_x$  et  $\nu_x$  sont absolument continues l'une par rapport à l'autre et leurs densités sont bornées. Ainsi on obtient 2.7.5. Maintenant puisque  $\nu_x$  est finie,  $\{\nu_x, x \in X\}$  est une  $\tau$ -mesure conforme (voir 2.6.3). Deux  $\tau$ -mesures conformes absolument continues l'une par rapport à l'autre sont égales (voir [Su], p. 181). Le théorème 2.7.4 en découle.

2.8. FLOT GÉODÉSIQUE ASSOCIÉ À UNE ACTION QUASI-CONVEXE

Soit  $X$  un CAT(-1)-espace, sur lequel agit  $\Gamma$  par isométrie de manière quasi-convexe. Notons  $\Lambda$  l'ensemble limite de  $\Gamma$  dans  $\partial X$ . Définissons  $G\Lambda$  l'ensemble des géodésiques (paramétrées) de  $X$ , dont les extrémités appartiennent à  $\Lambda$ :

$$G\Lambda = \{\gamma: \mathbf{R} \rightarrow X \text{ isométries avec } \gamma(-\infty) \in \Lambda, \gamma(+\infty) \in \Lambda\}.$$

Et équipons-le de la métrique suivante:

$$|\gamma - \gamma'|_{GA} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X \frac{e^{-|t|}}{2} dt.$$

La topologie associée est celle de la convergence uniforme sur les compacts.

En effet, on a :

2.8.1. PROPOSITION. *Quel que soit  $T \geq 0$ , alors :*

$$\begin{aligned} e^{-T} \sup_{t \in [-T, T]} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X &\leq |\gamma - \gamma'|_{G\Lambda} \\ &\leq \sup_{t \in [-T, T]} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X + 2e^{-T}. \end{aligned}$$

2.8.2. *Preuve.* L'inégalité de droite est un simple calcul. L'inégalité de gauche provient de l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction convexe (voir 1.3):

$$t \mapsto |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X. \quad \square$$

Clairement, le groupe  $\Gamma$  agit par isométries sur  $(G\Lambda, ||_{G\Lambda})$  de manière proprement discontinue. L'espace métrique quotient :

$$\mathcal{E} = G\Lambda/\Gamma$$

est l'espace du flot géodésique, associé à la paire  $(X, \Gamma)$ . Notons que  $\mathcal{E}$  est compact. En effet,  $\Gamma$  est quasi-convexe, donc le quotient de l'enveloppe de Gromov de  $\Lambda$  par  $\Gamma$  est compact (voir 1.8.6).

Le flot géodésique de  $G\Lambda$  est le groupe à un paramètre d'homéomorphisme  $\{\Phi_T, T \in \mathbf{R}\}$ , provenant de l'action naturelle de  $\mathbf{R}$  sur  $G\Lambda$ . Il est défini par :

$$(2.8.3) \quad \Phi_T(\gamma) = \gamma_T, \quad \text{avec} \quad \gamma_T(t) = \gamma(t + T).$$

Remarquons que pour tout  $T \in \mathbf{R}$ ,  $g \in \Gamma$ , et  $\gamma \in G\Lambda$  :

$$(2.8.4) \quad \Phi_T(g\gamma) = g\Phi_T(\gamma).$$

Le flot géodésique de  $\mathcal{E}$  est le groupe à un paramètre d'homéomorphismes, induit sur  $\mathcal{E}$  par la relation 2.8.4. On le notera encore  $\{\Phi_T, T \in \mathbf{R}\}$ .

Par analogie aux flots d'Anosov, on définit les sous-ensembles fortement stables et fortement instables de  $(G\Lambda, \Phi_T)$ . En  $\gamma \in G\Lambda$ , ils sont respectivement définis par :

$$\begin{aligned} W^{ss}(\gamma) &= \left\{ \eta \in G\Lambda \mid |\Phi_T(\eta) - \Phi_T(\gamma)|_{G\Lambda} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0 \right\} \\ W^{uu}(\gamma) &= \left\{ \eta \in G\Lambda \mid |\Phi_{-T}(\eta) - \Phi_{-T}(\gamma)|_{G\Lambda} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0 \right\}. \end{aligned}$$

Ils forment un feuilletage  $\Phi_T$ -invariant de  $G\Lambda$ . D'après 2.3.1, ils sont liés aux horosphères de la manière suivante :

$$(2.8.5) \quad \begin{aligned} W^{ss}(\gamma) &= \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(0) \in H_{\gamma(0), \gamma(+\infty)}, \eta(+\infty) = \gamma(+\infty)\} \\ W^{uu}(\gamma) &= \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(0) \in H_{\gamma(0), \gamma(-\infty)}, \eta(-\infty) = \gamma(-\infty)\}. \end{aligned}$$

Observons qu'ils sont canoniquement homéomorphes à  $\Lambda$  privé d'un point. On définit les sous-ensembles fortement stables et instables de  $(\mathcal{E}, \Phi_T)$  par:

2.8.6. DÉFINITION. Soit  $\pi$  la projection de  $G\Lambda$  sur  $\mathcal{E}$ , alors:

$$\begin{aligned} W^{ss}(\pi(\gamma)) &= \pi(W^{ss}(\gamma)) \\ W^{uu}(\pi(\gamma)) &= \pi(W^{uu}(\gamma)). \end{aligned}$$

Le sous-ensemble faiblement stable (resp. instable) de  $G\Lambda$  en  $\gamma$ , est la réunion des sous-ensembles fortement stables (resp. instables), le long de l'orbite de  $\gamma$  sous  $\Phi_T$ . En d'autres termes:

$$\begin{aligned} W^s(\gamma) &= \bigcup_{T \in \mathbf{R}} W^{ss}(\Phi_T(\gamma)) = \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(+\infty) = \gamma(+\infty)\} \\ W^u(\gamma) &= \bigcup_{T \in \mathbf{R}} W^{uu}(\Phi_T(\gamma)) = \{\eta \in G\Lambda \mid \eta(-\infty) = \gamma(-\infty)\}. \end{aligned}$$

De même, sont définis les sous-ensembles faiblement stables et instables de  $\mathcal{E}$ . D'après la définition 2.8.6, ils sont correspondance avec ceux de  $G\Lambda$ , via la projection de  $G\Lambda$  sur  $\mathcal{E}$ .

### 2.9. LE PARAMÉTRAGE DE HOPF DE $(\mathcal{E}, \Phi_T)$

Choisissons une origine  $x$  dans  $X$ . Soit  $\Delta$  la diagonale de  $\Lambda \times \Lambda$ . On définit une application de  $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$  dans  $G\Lambda$ , de la manière suivante: à

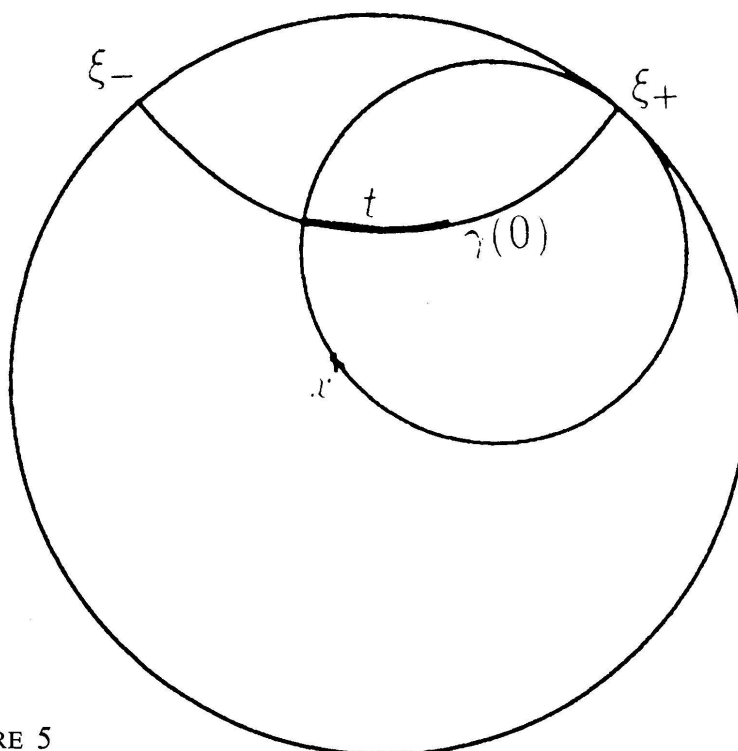


FIGURE 5