D'après l'exemple (a), on a:

$$\| t'(\xi) \| = e^{B_\xi(x,y)} = e^{B_\xi(x,g^{-1}x)} .$$

Par ailleurs, la composée $h = t \circ p$ vérifie $h^{-1}x = g^{-1}x$, d'où:

$$\| g'(\xi) \| = \| t'(\xi) \| \, \| p'(\xi) \| = \| t'(\xi) \| = e^{B_\xi(x,g^{-1}x)} .$$

2.7. Mesures conformes sur l'ensemble limite d'un groupe quasi-convexe

Soit Γ un groupe quasi-convexe d'isométries de X (voir 1.8), non élémentaire. Son ensemble limite Λ hérite de la structure conforme de ∂X. Notons $p(x, y, \xi)$ le facteur conforme en $\xi \in \Lambda$, de l'application identité de (Λ, d_x) sur (Λ, d_y). D'après le corollaire 2.6.3 (ou plutôt sa preuve), on a:

$$p(x, y, \xi) = e^{B_\xi(x,y)} . \tag{2.7.1}$$

D'autre part, d'après le corollaire 2.6.3, Γ agit par transformations conformes sur (Λ, d_x). Le facteur conforme de $g \in \Gamma$ en ξ, est:

$$| g'(\xi) |_x = p(x, g^{-1}x, \xi) . \tag{2.7.2}$$

Comme dans le cas des groupes convexes cocompacts d'isométries de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$, on définit la notion de mesure α-conforme sur Λ (voir [Su], [N], et [C] pour une notion analogue sur les espaces hyperboliques généraux):

La collection de mesures $\{\mu_x, x \in X\}$ est une mesure α-conforme, si pour tout $x \in X$, μ_x est finie non nulle, de support inclus dans Λ, et si pour tout $x, y \in X$ et $g \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} \mu_y &= [p(x, y, .)]^\alpha \mu_x \\ g^* \mu_x &= \mu_{g^{-1}x} = | g' |_x^\alpha \mu_x . \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

La théorie des mesures conformes est essentiellement la même que pour les groupes convexes cocompacts de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$. La seule différence est qu'une boule de Λ n'est pas en général une ombre. Néanmoins elle en est presque une d'après 1.6.2. Soit τ la dimension de Hausdorff de (Λ, d_x). Soit ν_x la τ-mesure de Hausdorff de (Λ, d_x). On a:

2.7.4. Théorème. *La collection* $\{\nu_x, x \in X\}$ *est une* τ*-mesure conforme. De plus, toute mesure conforme est une* τ*-mesure conforme, égale à une constante près à* $\{\nu_x, x \in X\}$.

De plus:

2.7.5. THÉORÈME.

a) *La dimension* τ *est égale au taux de croissance de* Γ *dans* X. *C'est-à-dire:*

$$\tau = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{1}{n} \log \# \{ g \in \Gamma \mid |x - gx|_X \leqslant n \} .$$

b) *La* ν_x*-mesure d'une boule de* (Λ, d_x), *est proportionnelle à son rayon à la puissance* τ. *Autrement dit: il existe une constante* $C_x \geqslant 1$, *telle que pour toute boule* $B(\xi, r)$ *centrée sur* Λ, *on ait:*

$$C_x^{-1} r^\tau \leqslant \nu_x(B(\xi, r)) \leqslant C_x r^\tau .$$

Rappelons les principales étapes de la démonstration de ces résultats: Soit $\alpha_0 = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{1}{n} \log \# \{ g \in \Gamma \mid |x - gx|_X \leqslant n \}$. S. J. Patterson a exhibé une mesure α_0-conforme (voir par exemple [Su], p. 175). D'autre part d'après D. Sullivan, si $\{\mu_x, x \in X\}$ est une α-mesure conforme, alors la μ_x mesure d'une boule de Λ est proportionnelle à son rayon à la puissance α (c'est le lemme de l'ombre [Su], p. 180). Dès lors par un principe général, α (et en particulier α_0) est égal à τ, les mesures μ_x et ν_x sont absolument continues l'une par rapport à l'autre et leurs densités sont bornées. Ainsi on obtient 2.7.5. Maintenant puisque ν_x est finie, $\{\nu_x, x \in X\}$ est une τ-mesure conforme (voir 2.6.3). Deux τ-mesures conformes absolument continues l'une par rapport à l'autre sont égales (voir [Su], p. 181). Le théorème 2.7.4 en découle.

2.8. FLOT GÉODÉSIQUE ASSOCIÉ À UNE ACTION QUASI-CONVEXE

Soit X un CAT(-1)-espace, sur lequel agit Γ par isométrie de manière quasi-convexe. Notons Λ l'ensemble limite de Γ dans ∂X. Définissons $G\Lambda$ l'ensemble des géodésiques (paramétrées) de X, dont les extrémités appartiennent à Λ:

$$G\Lambda = \{\gamma : \mathbf{R} \to X \text{ isométries avec } \gamma(-\infty) \in \Lambda, \gamma(+\infty) \in \Lambda\} .$$

Et équipons-le de la métrique suivante:

$$|\gamma - \gamma'|_{G\Lambda} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(t) - \gamma'(t)|_X \frac{e^{-|t|}}{2} dt .$$

La topologie associée est celle de la convergence uniforme sur les compacts.