Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 41 (1995)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: STRUCTURE CONFORME AU BORD ET FLOT GÉODÉSIQUE D'UN CAT(- 1)-ESPACE

Autor: Bourdon, Marc

Kapitel: 2.6. Structure conforme sur X

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61817

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

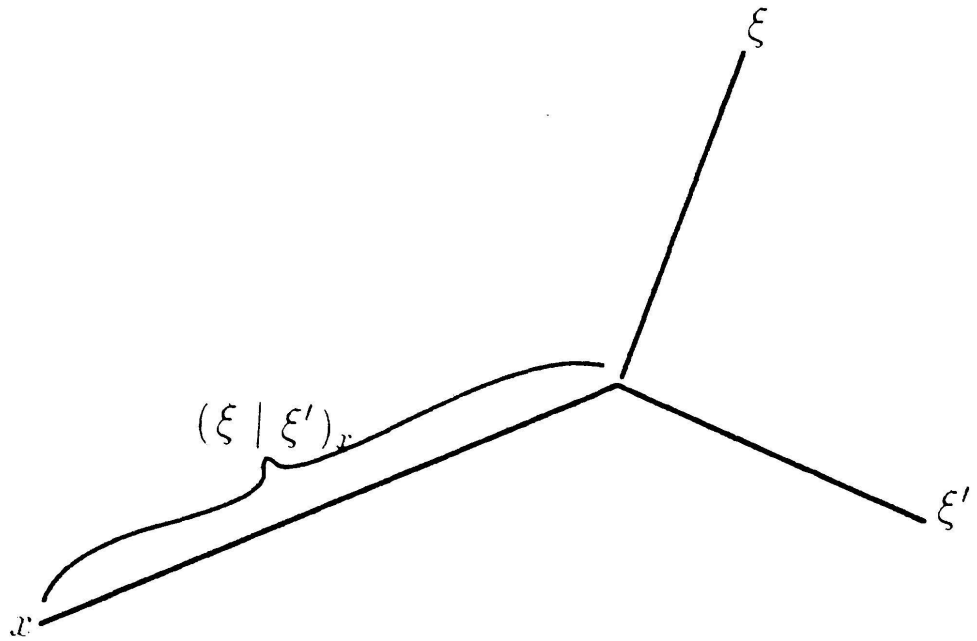

FIGURE 4

2.6. STRUCTURE CONFORME SUR ∂X

Nous montrons maintenant que la famille de métriques $\{d_x, x \in X\}$, définit une structure conforme sur ∂X. On a:

2.6.1. PROPOSITION. *Soit x une origine dans X et y, z deux éléments de X. La fonction sur $(\partial X, d_x)$, définie par:*

$$\xi \mapsto B_\xi(y, z)$$

est lipschitzienne.

2.6.2. *Preuve.* D'après les relations 2.2.1 et 2.2.2, on a:

$$B_\xi(y, z) = -B_\xi(x, y) + B_\xi(x, z) .$$

Aussi, il suffit de montrer que la fonction:

$$\xi \mapsto B_\xi(x, y)$$

est lipschitzienne sur $(\partial X, d_x)$. D'après la définition des métriques d_x et d'après la relation 2.4.2, on a:

$$d_y(\xi, \xi') = d_x(\xi, \xi') e^{\frac{1}{2}(B_\xi(x,y) + B_{\xi'}(x,y))}$$

ou encore

$$B_\xi(x, y) = 2\log d_y(\xi, \xi') - 2\log d_x(\xi, \xi') - B_{\xi'}(x, y) . \tag{1}$$

Supposons que ∂X ne soit pas réduit à un point. Soit alors V un petit voisinage compact de ξ, et ξ' un élément fixé en dehors de V. La fonction:

$$\xi \mapsto 2 \log d_x(\xi, \xi')$$

est lipschitzienne sur (V, d_x). Les métriques d_x et d_y étant des métriques visuelles de paramètres respectifs (x, e) et (y, e), elles sont Lipschitz-équivalentes (voir 1.5.3.b). Donc la fonction

$$\xi \mapsto 2 \log d_y(\xi, \xi')$$

est également lipschitzienne sur (V, d_x). Dès lors, par la relation (1), la fonction:

$$\xi \mapsto B_\xi(x, y)$$

est lipschitzienne sur (V, d_x). Maintenant la compacité de $(\partial X, d_x)$ montre qu'elle est lipschitzienne sur ∂X. $\square$

2.6.3. COROLLAIRE.

a) *Quels que soient les éléments x et y de X, les métriques d_x et d_y sont conformes.*

b) *Soit g une isométrie de X. Alors g est une application conforme de $(\partial X, d_x)$, dont le facteur conforme en ξ est:*

$$|g'(\xi)|_x = e^{B_\xi(x, g^{-1}x)} .$$

2.6.4. *Preuve:*

a) D'après la relation 2.4.2 et la définition des métriques d_x, on a:

$$d_y(\xi, \xi') = d_x(\xi, \xi') e^{\frac{1}{2}(B_\xi(x,y) + B_{\xi'}(x,y))} .$$

Donc la proposition 2.6.1 donne:

$$\frac{d_y(\xi, \xi')}{d_x(\xi, \xi')} \underset{\xi' \to \xi}{\to} e^{B_\xi(x,y)}$$

ce qui montre que d_x et d_y sont conformes.

b) Puisque g est une isométrie de X, on a:

$$(g\xi \mid g\xi')_x = (\xi \mid \xi')_{g^{-1}x} .$$

Donc:

$$d_x(g\xi, g\xi') = d_{g^{-1}x}(\xi, \xi')$$

et la fin de la preuve est identique au (a). $\square$

2.6.5. EXEMPLES.

a) Prenons $X = \mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$ et x le centre du modèle en boule. Le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}})$ agit par transformations conformes sur la sphère S^n munie de la métrique euclidienne. Notons $\| g'(\xi) \|$ le facteur conforme en ξ d'un élément g de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}})$. D'après l'exemple 2.5.9(a) on a:

$$\| g'(\xi) \| = | g'(\xi) |_x = e^{B_\xi(x, g^{-1}x)} .$$

b) Prenons $X = \mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$ et normalisons la métrique afin que sa courbure soit comprise entre -4 et -1. Soit x le centre du modèle en boule.

Le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$ laisse invariant le champ d'hyperplans $\{P_\xi, \xi \in S^{2n-1}\}$, défini par:

$$P_\xi = \{u \in T_\xi S^{2n-1};\ h(\xi, u) = 0\}$$

où h est la forme hermitienne de $\mathbf{C}^n$:

$$h(\xi, u) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{u}_i .$$

Il agit par transformations conformes sur $\{P_\xi, \xi \in S^{2n-1}\}$ muni de la métrique euclidienne. Notons $\| g'(\xi) \|$ le facteur conforme sur P_ξ d'un élément g de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$. Nous allons voir qu'à nouveau:

$$\| g'(\xi) \| = e^{B_\xi(x, g^{-1}x)} = | g'(\xi) |_x .$$

Pour ce faire, ramenons-nous à l'exemple a) par un argument de D. Sullivan ([Su], p. 176). Observons tout d'abord que $\| g'(\xi) \|$ ne dépend que de $g^{-1}x$. En effet, si $h \in \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$ vérifie $h^{-1}x = g^{-1}x$, alors la composée $g \circ h^{-1}$ fixe x le centre du modèle en boule, donc $g \circ h^{-1}$ appartient à $U(n)$ et:

$$\| g'(\xi) \| = \| h'(\xi) \| .$$

Choisissons donc judicieusement h. Notons y l'intersection de l'horosphère H_ξ, basée en ξ, contenant $g^{-1}x$, avec la géodésique $(x\xi)$. Le stabilisateur de H_ξ dans $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$ agit transitivement sur H_ξ, de plus le facteur conforme de ses éléments en P_ξ est 1. Soit p un élément de $\mathrm{Stab}(H_\xi)$, vérifiant

$$p(g^{-1}x) = y .$$

Soit aussi une copie de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$ contenant la géodésique $(x\xi)$. L'espace tangent à son bord en ξ est contenu dans P_ξ. Soit t un élément de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}})$ qui fixe cette copie et envoie y sur x.

D'après l'exemple (a), on a:

$$\| t'(\xi) \| = e^{B_\xi(x,y)} = e^{B_\xi(x,g^{-1}x)} .$$

Par ailleurs, la composée $h = t \circ p$ vérifie $h^{-1}x = g^{-1}x$, d'où:

$$\| g'(\xi) \| = \| t'(\xi) \| \, \| p'(\xi) \| = \| t'(\xi) \| = e^{B_\xi(x,g^{-1}x)} .$$

2.7. Mesures conformes sur l'ensemble limite d'un groupe quasi-convexe

Soit Γ un groupe quasi-convexe d'isométries de X (voir 1.8), non élémentaire. Son ensemble limite Λ hérite de la structure conforme de ∂X. Notons $p(x, y, \xi)$ le facteur conforme en $\xi \in \Lambda$, de l'application identité de (Λ, d_x) sur (Λ, d_y). D'après le corollaire 2.6.3 (ou plutôt sa preuve), on a:

$$p(x, y, \xi) = e^{B_\xi(x,y)} . \tag{2.7.1}$$

D'autre part, d'après le corollaire 2.6.3, Γ agit par transformations conformes sur (Λ, d_x). Le facteur conforme de $g \in \Gamma$ en ξ, est:

$$| g'(\xi) |_x = p(x, g^{-1}x, \xi) . \tag{2.7.2}$$

Comme dans le cas des groupes convexes cocompacts d'isométries de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$, on définit la notion de mesure α-conforme sur Λ (voir [Su], [N], et [C] pour une notion analogue sur les espaces hyperboliques généraux):

La collection de mesures $\{\mu_x, x \in X\}$ est une mesure α-conforme, si pour tout $x \in X$, μ_x est finie non nulle, de support inclus dans Λ, et si pour tout $x, y \in X$ et $g \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} \mu_y &= [p(x, y, .)]^\alpha \mu_x \\ g^* \mu_x &= \mu_{g^{-1}x} = | g' |_x^\alpha \mu_x . \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

La théorie des mesures conformes est essentiellement la même que pour les groupes convexes cocompacts de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$. La seule différence est qu'une boule de Λ n'est pas en général une ombre. Néanmoins elle en est presque une d'après 1.6.2. Soit τ la dimension de Hausdorff de (Λ, d_x). Soit ν_x la τ-mesure de Hausdorff de (Λ, d_x). On a:

2.7.4. Théorème. *La collection* $\{\nu_x, x \in X\}$ *est une* τ*-mesure conforme. De plus, toute mesure conforme est une* τ*-mesure conforme, égale à une constante près à* $\{\nu_x, x \in X\}$.

De plus: