Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 41 (1995)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: STRUCTURE CONFORME AU BORD ET FLOT GÉODÉSIQUE D'UN CAT(- 1)-ESPACE

Autor: Bourdon, Marc

Kapitel: 2.4. Produit de Gromov de deux éléments de X

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61817

D'après 2.2.2, ils sont indépendants de x. Plus précisément, l'ensemble de niveau t de f_x est égal à l'ensemble de niveau $t - B_\xi(x, y)$ de f_y. Ce sont les horosphères en ξ.

La distance horosphérique s'exprime maintenant de la manière suivante: Soient $H_{x,\xi}$ et $H_{y,\xi}$ les horosphères en ξ, passant par x et y. On a d'après 2.2.3:

$$|B_\xi(x, y)| = d(x, H_{y,\xi}) = d(H_{x,\xi}, H_{y,\xi}) .$$

Signalons aussi une autre définition des horosphères, qui permet de les relier aux sous-espaces fortement stables et fortement instables du flot géodésique: Soit $\xi \in \partial X$. Pour $x \in X$, notons r_x: $[0, +\infty[\to X$ le rayon géodésique issu de x et d'extrémité ξ. Alors:

(2.3.1) $$H_{x,\xi} = \{y \in X \mid \lim_{t \to +\infty} |r_x(t) - r_y(t)| = 0\} .$$

Notons que les deux définitions coïncident, grâce à 2.2.0.

2.4. Produit de Gromov de deux éléments de ∂X

Soit x, y, z trois points de X. Rappelons que le produit de Gromov de y, z relativement à x, est défini par (voir figure 0):

$$(y \mid z)_x = \tfrac{1}{2}(|x - y| + |x - z| - |y - z|)$$

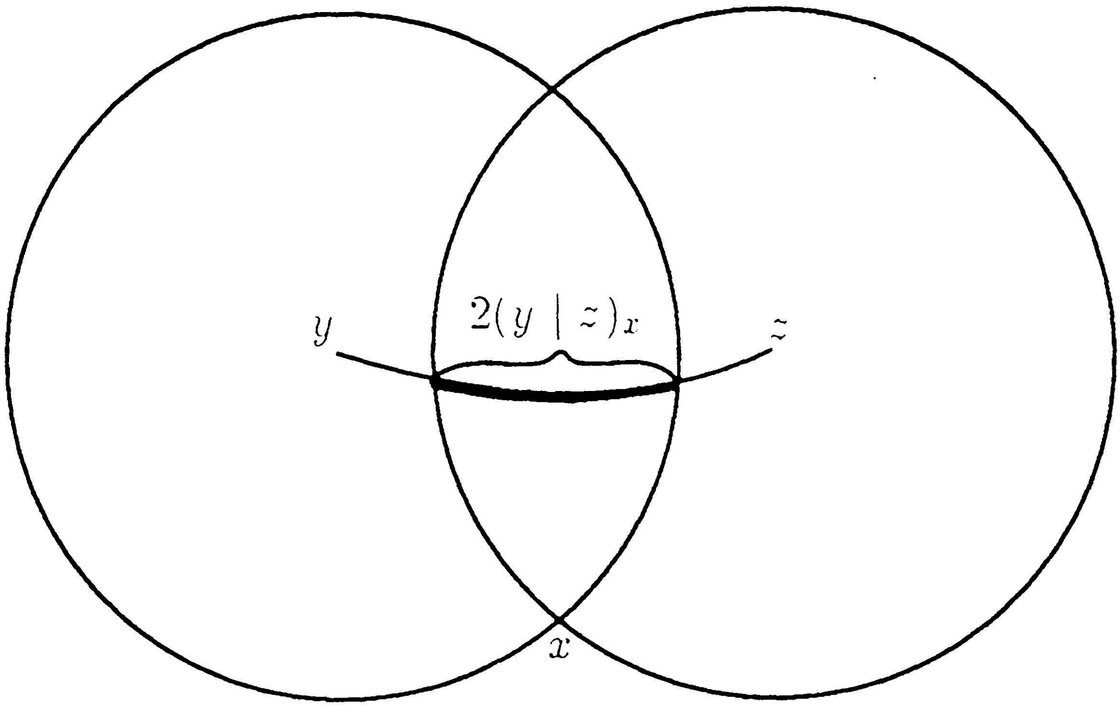

Figure 0

Soit maintenant ξ, ξ' deux points distincts de ∂X, x un point de X, et p appartenant à $(\xi\xi')$. Suivant V. Kaimanovich [K], considérons l'expression:

$$\tfrac{1}{2}(B_\xi(x,p) + B_{\xi'}(x,p)) .$$

Elle est indépendante du point p choisi sur $(\xi\xi')$. On l'appellera produit de Gromov de ξ et ξ' relativement à x, et on la notera $(\xi \mid \xi')_x$. (Voir figure 1.)

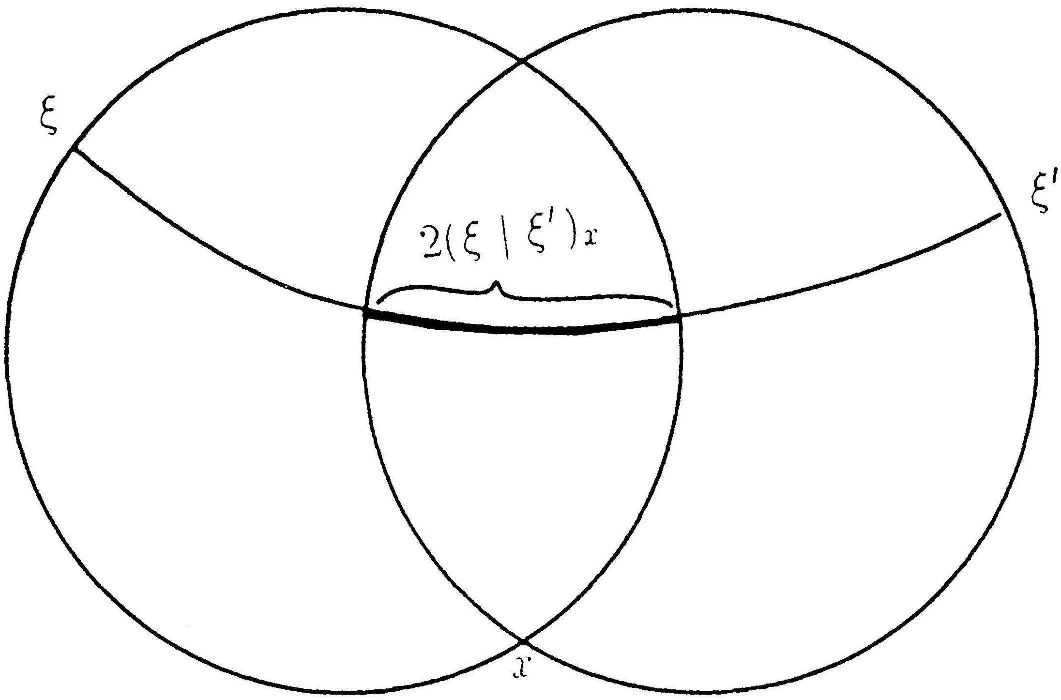

FIGURE 1

Notons que

$$(2.4.1) \qquad (\xi \mid \xi')_x = (\xi' \mid \xi)_x$$

$$(2.4.2) \qquad (\xi \mid \xi')_y = (\xi \mid \xi')_x - \tfrac{1}{2}(B_\xi(x,y) + B_{\xi'}(x,y)) .$$

Le lecteur vérifiera sans peine la proposition suivante:

2.4.3. PROPOSITION. *Soit* $y \in [x\xi)$ *et* $y' \in [x\xi')$. *Le produit de Gromov* $(y \mid y')_x$ *converge vers* $(\xi \mid \xi')_x$, *lorsque* y *et* y' *tendent respectivement vers* ξ *et* ξ'.

2.5. UNE FAMILLE DE MÉTRIQUES VISUELLES SUR ∂X

Soit x une origine dans X. Pour $\xi, \xi' \in \partial X$, définissons:

$$d_x(\xi, \xi') = e^{-(\xi \mid \xi')_x} \quad \text{si} \quad \xi \neq \xi'$$

$$d_x(\xi, \xi') = 0 \text{ sinon} .$$