

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 41 (1995)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** STRUCTURE CONFORME AU BORD ET FLOT GÉODÉSIQUE D'UN  
CAT(- 1)-ESPACE  
**Autor:** Bourdon, Marc  
**Kapitel:** 2.3. Horosphères  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61817>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 30.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

limite et du flot géodésique associés à une action isométrique, quasi-convexe, d'un groupe hyperbolique sur  $X$ . On développe brièvement la notion de mesure conforme sur l'ensemble limite, et on rappelle une construction de la mesure d'entropie maximale du flot géodésique. Au paragraphe 2.11, nous montrons le théorème 2.0.1.

## 2.1. FONCTIONS DE BUSEMANN

Soit  $r: [0, +\infty[ \rightarrow X$  un rayon géodésique, et  $x \in X$ . D'après l'inégalité triangulaire, la fonction

$$t \mapsto |x - r(t)| - t$$

est décroissante et minorée par  $-|x - r(0)|$ . Appelons  $b_r(x)$  sa limite en  $+\infty$ . L'application  $b_r$  de  $X$  dans  $\mathbf{R}$  ainsi définie, est la fonction de Busemann associée au rayon  $r$ .

## 2.2. DISTANCES HOROSPHERIQUES

Soit  $x, y \in X$ ,  $\xi \in \partial X$ , et  $r: [0, +\infty[ \rightarrow X$  un rayon géodésique d'extrémité  $\xi$ . La quantité

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x - r(t)| - |y - r(t)|$$

est égale à  $b_r(x) - b_r(y)$ . Elle est indépendante du rayon  $r$  d'extrémité  $\xi$ . En effet si  $r'$  est un autre rayon d'extrémité  $\xi$ , par comparaison avec  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^2$ , on a:

$$(2.2.0) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} d(r'(t), r) = 0.$$

La limite  $B_\xi(x, y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} |x - r(t)| - |y - r(t)|$  est appelée distance horosphérique de  $x$  à  $y$  relativement à  $\xi$ . Elle vérifie:

$$(2.2.1) \quad B_\xi(x, y) = -B_\xi(y, x)$$

$$(2.2.2) \quad B_\xi(x, z) = B_\xi(x, y) + B_\xi(y, z)$$

$$(2.2.3) \quad B_\xi(x, y) \leq |x - y|$$

avec égalité si et seulement si  $y \in [x\xi)$ .

## 2.3. HOROSPHERES

Considérons les ensembles de niveau de la fonction:

$$f_x: z \mapsto B_\xi(x, z).$$

D'après 2.2.2, ils sont indépendants de  $x$ . Plus précisément, l'ensemble de niveau  $t$  de  $f_x$  est égal à l'ensemble de niveau  $t - B_\xi(x, y)$  de  $f_y$ . Ce sont les horosphères en  $\xi$ .

La distance horosphérique s'exprime maintenant de la manière suivante: Soient  $H_{x, \xi}$  et  $H_{y, \xi}$  les horosphères en  $\xi$ , passant par  $x$  et  $y$ . On a d'après 2.2.3:

$$|B_\xi(x, y)| = d(x, H_{y, \xi}) = d(H_{x, \xi}, H_{y, \xi}) .$$

Signalons aussi une autre définition des horosphères, qui permet de les relier aux sous-espaces fortement stables et fortement instables du flot géodésique: Soit  $\xi \in \partial X$ . Pour  $x \in X$ , notons  $r_x: [0, +\infty[ \rightarrow X$  le rayon géodésique issu de  $x$  et d'extrémité  $\xi$ . Alors:

$$(2.3.1) \quad H_{x, \xi} = \{y \in X \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} |r_x(t) - r_y(t)| = 0\} .$$

Notons que les deux définitions coïncident, grâce à 2.2.0.

#### 2.4. PRODUIT DE GROMOV DE DEUX ÉLÉMENTS DE $\partial X$

Soit  $x, y, z$  trois points de  $X$ . Rappelons que le produit de Gromov de  $y, z$  relativement à  $x$ , est défini par (voir figure 0):

$$(y | z)_x = \frac{1}{2} (|x - y| + |x - z| - |y - z|)$$

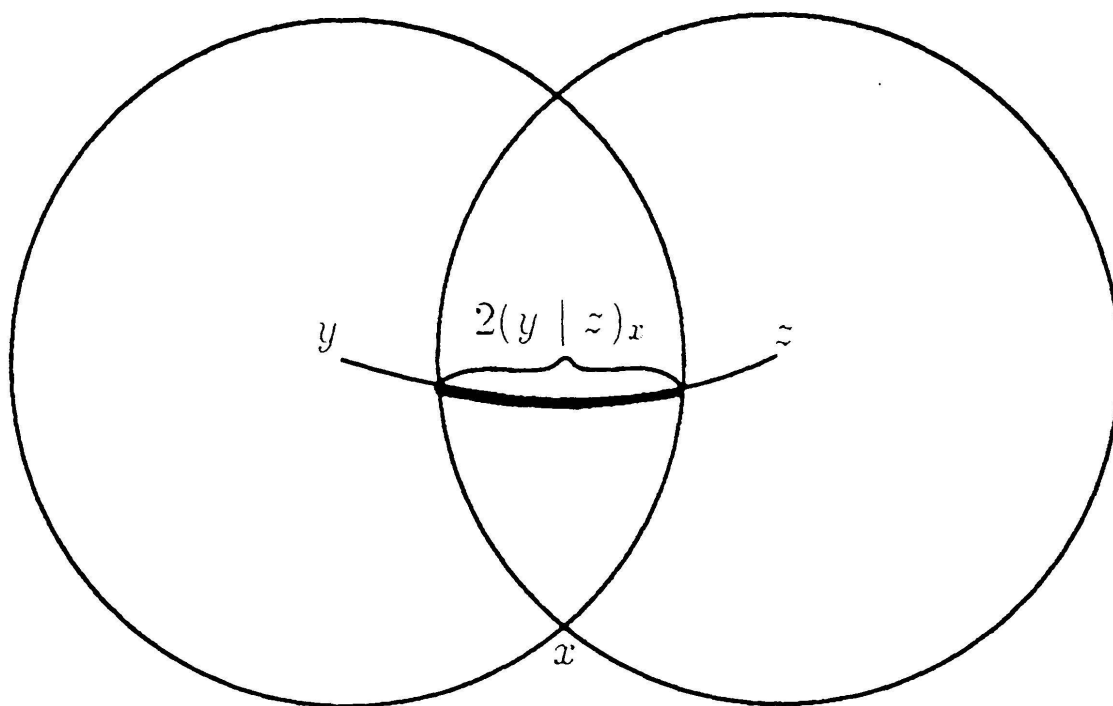


FIGURE 0