Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 41 (1995)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: STRUCTURE CONFORME AU BORD ET FLOT GÉODÉSIQUE D'UN CAT(- 1)-ESPACE

Autor: Bourdon, Marc

Kapitel: 2.0. Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61817

agit de manière cocompacte sur l'enveloppe convexe $H(\Lambda)$ de son ensemble limite. Il est quasi-convexe si et seulement si il est convexe cocompact. En effet, $Q(\Lambda)$ et $H(\Lambda)$ sont à distance de Hausdorff finie. Une manière de le montrer est la suivante (voir [C]): Le convexe $H(\Lambda)$ est la réunion des n-simplexes idéaux de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$, dont les arêtes sont des géodésiques de $Q(\Lambda)$ (c'est un théorème de Carathéodory appliqué au modèle de Klein de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$ (voir [Ber], théorème 11.1.8.6)). Or tout point d'un n-simplexe de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$ est à distance majorée par une constante universelle $C(n)$, de ses arêtes.

Signalons aussi que Γ est convexe cocompact si et seulement si il est géométriquement fini sans parabolique (une conséquence de la décomposition de Margulis en parties fines et épaisses).

Enfin, tout groupe fuchsien de type fini est géométriquement fini (voir [Bea], chapitre 10). Aussi, un groupe fuchsien est quasi-convexe si et seulement si il est de type fini sans parabolique.

2. Structure conforme sur le bord d'un CAT(-1)-espace Ensemble limite et flot géodésique associés à une action quasi-convexe

2.0. Introduction

Soit X un CAT(-1)-espace. Nous montrons que son bord admet une structure conforme canonique, compatible avec sa structure quasi-conforme. Plus précisément, nous construisons sur ∂X une famille de métriques visuelles $\{d_x, x \in X\}$, deux à deux conformes, qui ont la propriété que les isométries de X soient des applications conformes de $(\partial X, d_x)$.

Rappelons qu'une application $f: (A, d_A) \to (B, d_B)$ est conforme, si quel que soit $a_0 \in A$, la limite lorsque a tend vers a_0 de

$$\frac{d_B(f(a), f(a_0))}{d_A(a, a_0)}$$

existe et est finie non nulle. On l'appellera le facteur conforme de f en a_0. Rappelons également que deux métriques d_1, d_2 sur A, sont conformes, si l'identité $(A, d_1) \to (A, d_2)$ est conforme.

Soit maintenant une action isométrique quasi-convexe d'un groupe hyperbolique Γ sur un CAT(-1)-espace X. A cette action sont associés:

— L'ensemble limite de Γ dans ∂X, muni de la structure conforme induite, sur lequel agit Γ par transformations conformes.

— Un flot géodésique qui généralise le flot géodésique habituel du fibré unitaire tangent à une variété riemannienne compacte (voir [G] et 2.8).

Nous montrons que la structure conforme de l'ensemble limite détermine le flot géodésique et inversement. Précisons ceci:

Supposons que Γ agisse par isométries de manière quasi convexe, sur deux CAT(−1)-espaces X_1 et X_2. Notons respectivement $\Lambda_1, \Lambda_2, \mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2$, les ensembles limites et les espaces du flot géodésique associés aux deux actions de Γ. D'après 1.8.5, Λ_1 et Λ_2 se correspondent par un homéomorphisme canonique. Γ-équivariant et quasi conforme:

$$\Omega : \Lambda_1 \to \Lambda_2 .$$

D'autre part, l'ensemble:

$$\Lambda_i \times \Lambda_i - \{\text{diagonale}\}/\Gamma, \ i = 1, 2$$

s'identifie à $\mathscr{O}_i$, l'ensemble des orbites (orientées) du flot de $\mathscr{E}_i$. Donc l'homéomorphisme Γ-équivariant:

$$\Omega \times \Omega : \ \Lambda_1 \times \Lambda_1 - \{\text{diagonale}\} \to \Lambda_2 \times \Lambda_2 - \{\text{diagonale}\}$$

donne par passage au quotient une bijection:

$$F : \mathscr{O}_1 \to \mathscr{O}_2 .$$

M. Gromov montre l'existence d'une équivalence d'orbite de $\mathscr{E}_1$ sur $\mathscr{E}_2$ qui induit l'application F entre $\mathscr{O}_1$ et $\mathscr{O}_2$. (Une équivalence d'orbite est un homéomorphisme envoyant orbites sur orbites sans préserver en général le paramétrage). Nous montrons:

2.0.1. THÉORÈME. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *L'homéomorphisme quasi-conforme* Ω *est conforme.*

(ii) *L'équivalence d'orbite précédente est réalisée par une conjugaison des flots géodésiques (une équivalence d'orbite préservant le paramétrage).*

Sans doute ce théorème est-il déjà connu des spécialistes (U. Hamenstädt fait des choses assez semblables dans [H]). Il ne semble pourtant pas avoir été écrit sous cette forme, ni dans cette généralité.

Aux paragraphes 2.1, 2.2, 2.3, nous rappelons brièvement les définitions des fonctions de Busemann, de distances horosphériques et d'horosphères. Les paragraphes 2.4, 2.5, 2.6 sont consacrés à la construction de la structure conforme de ∂X. Les paragraphes 2.7, 2.8, 2.9, 2.10 traitent de l'ensemble limite et du flot géodésique associés à une action isométrique, quasi-convexe, d'un groupe hyperbolique sur X. On développe brièvement la notion de mesure conforme sur l'ensemble limite, et on rappelle une construction de la mesure d'entropie maximale du flot géodésique. Au paragraphe 2.11, nous montrons le théorème 2.0.1.

2.1. Fonctions de Busemann

Soit $r\colon [0, +\infty[\to X$ un rayon géodésique, et $x \in X$. D'après l'inégalité triangulaire, la fonction

$$t \mapsto |x - r(t)| - t$$

est décroissante et minorée par $-|x - r(0)|$. Appelons $b_r(x)$ sa limite en $+\infty$. L'application b_r de X dans $\mathbf{R}$ ainsi définie, est la fonction de Busemann associée au rayon r.

2.2. Distances horosphériques

Soit $x, y \in X$, $\xi \in \partial X$, et $r\colon [0, +\infty[\to X$ un rayon géodésique d'extrémité ξ. La quantité

$$\lim_{t \to +\infty} |x - r(t)| - |y - r(t)|$$

est égale à $b_r(x) - b_r(y)$. Elle est indépendante du rayon r d'extrémité ξ. En effet si r' est un autre rayon d'extrémité ξ, par comparaison avec $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}$, on a:

$$\lim_{t \to +\infty} d(r'(t), r) = 0 \,. \tag{2.2.0}$$

La limite $B_\xi(x, y) = \lim\limits_{t \to +\infty} |x - r(t)| - |y - r(t)|$ est appelée distance horosphérique de x à y relativement à ξ. Elle vérifie:

$$B_\xi(x, y) = -B_\xi(y, x) \tag{2.2.1}$$

$$B_\xi(x, z) = B_\xi(x, y) + B_\xi(y, z) \tag{2.2.2}$$

$$B_\xi(x, y) \leqslant |x - y| \tag{2.2.3}$$

avec égalité si et seulement si $y \in [x\xi)$.

2.3. Horosphères

Considérons les ensembles de niveau de la fonction:

$$f_x\colon z \mapsto B_\xi(x, z) \,.$$