

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 41 (1995)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** STRUCTURE CONFORME AU BORD ET FLOT GÉODÉSIQUE D'UN CAT(- 1)-ESPACE  
**Autor:** Bourdon, Marc  
**Kapitel:** 1.7. Groupes hyperboliques  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61817>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 30.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 1.7. GROUPES HYPERBOLIQUES

Soit  $\Gamma$  un groupe de type fini et  $S = \{a_i, i = 1, \dots, s\}$  un système de générateurs de  $\Gamma$ . Supposons  $S$  symétrique, c'est-à-dire:

$$\forall i \in \{1, \dots, s\}; a_i \neq e$$

et

$$a_i \in S \Rightarrow a_i^{-1} \in S.$$

La métrique des mots relative à  $S$ , est définie de la manière suivante:

$$|g - g'|_S = \inf\{n \in \mathbf{N} \mid g^{-1}g' = a_{i_1} \dots a_{i_n}, a_{i_k} \in S\}.$$

La distance  $|e - g|_S$  sera généralement notée  $|g|_S$ . Observons que  $\Gamma$  agit à gauche par isométries sur  $(\Gamma, ||_S)$ .

Le graphe de Cayley  $\mathcal{G}(\Gamma, S)$  est un 1-complexe simplicial géodésique et propre, dans lequel  $(\Gamma, ||_S)$  est plongé isométriquement. Ses sommets sont les éléments de  $\Gamma$ , deux sommets  $g, g'$  sont reliés par une arête si  $g^{-1}g' \in S$ , c'est-à-dire si  $|g - g'|_S = 1$ . Il est muni de la métrique simpliciale, c'est-à-dire de la métrique de longueur qui donne à chaque arête une longueur un.

1.7.1. DÉFINITION. Le groupe  $\Gamma$  est hyperbolique si l'espace métrique géodésique propre  $\mathcal{G}(\Gamma, S)$  est hyperbolique.

D'après l'invariance de l'hyperbolicité par quasi-isométrie, cette définition est indépendante du système de générateurs  $S$ . En effet, si  $S'$  en est un autre,  $(\Gamma, ||_S)$  et  $(\Gamma, ||_{S'})$ , et par suite  $\mathcal{G}(\Gamma, S)$  et  $\mathcal{G}(\Gamma, S')$  sont quasi-isométriques.

1.7.2. EXEMPLES ET PROPRIÉTÉS. Sont hyperboliques:

- a) Les groupes finis.
- b) Les groupes libres de type fini.
- c) Les groupes à petite simplification  $C'(1/6)$ . (Voir [G-H], Appendice.)

Un groupe hyperbolique jouit des propriétés suivantes:

- a) Il est de présentation finie, et «presque tout» groupe de présentation finie est hyperbolique (voir [Ch], théorème 1.3.2).
- b) Il ne contient qu'un nombre fini de classes de conjugaison d'éléments de torsion (voir [Ch], p. 20).
- c) Il ne contient aucun sous-groupe abélien de rang supérieur ou égal à 2.

d) Ou bien il est fini, ou bien il est une extension finie de  $\mathbf{Z}$ , ou bien il contient un groupe libre de rang au moins deux. Dans les deux premiers cas il est dit élémentaire. S'il est non élémentaire, il est à croissance exponentielle ([G-H], chapitre 8, théorème 37).

e) Il est automatique (voir [C-D-P], [C-E-H-P-T]).

## 1.8. GROUPES QUASI-CONVEXES

1.8.1. DÉFINITION. Soit  $X$  un espace métrique géodésique propre, et  $x$  un élément de  $X$ . Un sous-groupe d'isométries de  $X$  est quasi-convexe, s'il est proprement discontinu, et si l'orbite de  $x$  est un quasi-convexe de  $X$ .

On vérifie que la définition est indépendante du point  $x$  choisi. Notons qu'un sous-groupe d'isométries proprement discontinu cocompact, est quasi-convexe. La propriété de  $X$  permet de montrer:

1.8.2. PROPOSITION. *Un groupe quasi-convexe  $\Gamma$  d'isométries de  $X$ , est de type fini. De plus, si  $S$  est un système symétrique de générateurs de  $\Gamma$ , l'application:*

$$\begin{aligned} (\Gamma, ||_S) &\rightarrow X \\ g &\mapsto gx \end{aligned}$$

*est une quasi-isométrie.*

Pour montrer cette proposition, il suffit d'exhiber un système de générateurs  $S$  adéquat. Si l'orbite de  $x$  est  $C$ -quasi-convexe, on vérifie que l'ensemble:

$$S = \{a_i \in \Gamma - \{e\} \mid |x - a_i x|_X \leq 2C + 1\}$$

convient.

Supposons maintenant  $X$  hyperbolique. Alors, par l'invariance de l'hyperbolicité par quasi-isométrie:

1.8.3. COROLLAIRE. *Tout groupe quasi-convexe d'isométries d'un espace hyperbolique, est hyperbolique.*

Par l'invariance des quasi-convexes par quasi-isométries, on obtient la caractérisation suivante des groupes quasi-convexes:

1.8.4. COROLLAIRE. *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe d'isométries d'un espace hyperbolique  $X$ . Les assertions suivantes sont équivalentes:*

a)  $\Gamma$  est quasi-convexe.