1.4. Bord d'un espace hyperbolique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

d) La fonction distance entre deux segments géodésiques est strictement convexe.

Une autre propriété importante, est leur caractérisation locale suivante. Elle permet de construire de nombreux exemples de CAT$(-b^2)$-espace, dont les fameux polyèdres hyperboliques de M. Gromov (voir [G-H] chapitre 10, [Be], [Ha]).

1.3.2. DÉFINITION-THÉORÈME. L'espace X est dit à courbure inférieure ou égale à $-b^2$, si tout point de X admet un voisinage satisfaisant CAT$(-b^2)$. Si X est géodésique simplement connexe à courbure $\leqslant -b^2$, alors X est un CAT$(-b^2)$-espace.

1.4. BORD D'UN ESPACE HYPERBOLIQUE

Soit (X, d_X) un espace δ-hyperbolique. Afin de lui appliquer le théorème d'Ascoli, supposons-le propre (un espace métrique est propre, si ses boules fermées sont compactes).

Définissons $\mathscr{R}$ l'ensemble des rayons géodésiques et munissons-le de la relation d'équivalence suivante: Deux rayons sont équivalents s'ils sont à distance de Hausdorff bornée.

L'ensemble des classes d'équivalence est le bord de X, on le note ∂X.

On définit une topologie sur $X \cup \partial X$, de la manière suivante:

Soit x une origine dans X, et soit $\mathscr{R}(x)$ l'ensemble des rayons et des segments géodésiques:

$$\gamma : I \to X$$

où I est un intervalle du type $[0, +\infty[$ ou $[0, a]$, $a \in \mathbf{R}^+$, et γ vérifie $\gamma(0) = x$. Si $I = [0, a]$, convenons de prolonger γ à $[0, +\infty[$, en posant $\gamma(t) = \gamma(a)$ pour t supérieur à a. Munissons $\mathscr{R}(x)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. D'après le théorème d'Ascoli, $\mathscr{R}(x)$ est compact et l'application naturelle de $\mathscr{R}(x)$ dans $X \cup \partial X$ est surjective. Equipé de la topologie quotient, $X \cup \partial X$ est un compact, dans lequel l'espace métrique X est ouvert et dense. Ainsi le compact ∂X permet de compactifier X. On montre que la topologie est indépendante de l'origine x.

Le théorème d'Ascoli et les propriétés du paragraphe 1.2 donnent:

1.4.1. PROPOSITION

a) *Soit* $x \in X$, *et* $\xi \in \partial X$. *Il existe un rayon géodésique d'extrémités* x *et* ξ. *On le notera* $[x\xi)$. *Deux rayons géodésiques de mêmes extrémités sont à distance de Hausdorff inférieure à* 2δ.

b) *Soient* ξ *et* ξ' *deux points distincts de* ∂X. *Il existe une géodésique d'extrémités* ξ *et* ξ'. *On la notera* $(\xi\xi')$. *Deux géodésiques de mêmes extrémités sont à distance de Hausdorff inférieure à* 4δ.

c) *(Propriétés des quasi-rayons géodésiques et des quasi-géodésiques). Il existe une constante* C *ne dépendant que de* δ, λ, k, *avec la propriété suivante: tout* (λ, k)*-quasi-rayon géodésique (resp. quasi-géodésique) de* X, *est à distance de Hausdorff inférieure à* C *d'un rayon géodésique (resp. géodésique) de* X.

1.4.2. *Remarque.* Lorsque X est un $\mathrm{CAT}(-b^2)$-espace, deux points de $X \cup \partial X$ détermine un unique arc géodésique. C'est immédiat par comparaison avec $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}(-b^2)$.

1.4.3. EXEMPLES

a) Le bord d'un arbre réel propre est totalement discontinu.

b) Soit X une variété riemannienne simplement connexe, de dimension finie, à courbure inférieure à $-b^2$. Etant donnée une origine x dans X, l'application exponentielle de l'espace tangent en x, induit un homéomorphisme de la sphère unité sur ∂X.

c) Soit X un $\mathrm{CAT}(-b^2)$-espace, et x une origine dans X. Notons $S(x, R)$ la sphère de centre x et de rayon R. Deux points de X déterminent un unique segment géodésique, donc pour $R \geqslant R'$, il existe une application naturelle de $S(x, R)$ dans $S(x, R')$. On montre que ∂X est homéomorphe à la limite projective des $S(x, R)$, lorsque R tend vers l'infini. Notons que le bord d'un $\mathrm{CAT}(-b^2)$-espace est généralement compliqué. N. Benakli [Be] a construit des exemples (polyèdres de Gromov), dont le bord est une courbe de Menger ou de Sierpiński.

1.5. MÉTRIQUES VISUELLES SUR ∂X

De même qu'un changement conforme de métrique sur $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$, permet d'identifier son bord à celui de la boule euclidienne de rayon un, on peut modifier de manière «conforme» la métrique d'un espace δ-hyperbolique X,