

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 41 (1995)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** STRUCTURE CONFORME AU BORD ET FLOT GÉODÉSIQUE D'UN  
CAT(- 1)-ESPACE  
**Autor:** Bourdon, Marc  
**Kapitel:** 1. Préliminaires  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61817>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 30.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

de  $\Gamma$  dans  $\partial X$  et le flot géodésique sont intimement liés au groupe. En effet si  $\Gamma$  agit comme précédemment sur deux  $CAT(-1)$ -espaces, alors les ensembles limites associés (qui sont canoniquement homéomorphes à  $\partial\Gamma$ ) se correspondent par un homéomorphisme  $\Omega$ , canonique,  $\Gamma$ -équivariant et quasi-conforme. De même, d'après une construction de M. Gromov, les espaces du flot géodésique se correspondent par une équivalence d'orbites (un homéomorphisme envoyant orbites sur orbites sans préserver en général le paramétrage). Nous montrons que l'homéomorphisme quasi-conforme  $\Omega$  est conforme si et seulement si l'équivalence d'orbites de M. Gromov est réalisée par une conjugaison des flots géodésiques (une équivalence d'orbites qui préserve le paramétrage). Ainsi la structure conforme de l'ensemble limite détermine le flot géodésique et inversement. La preuve de ce résultat consiste en grande partie à adapter aux  $CAT(-1)$ -espaces certaines idées développées par Hopf, Patterson, Sullivan sur les variétés à courbure  $-1$ ; en particulier les mesures conformes sur l'ensemble limite, et les mesures induites sur le carré de l'ensemble limite et sur l'espace du flot géodésique.

La première partie de cet article est plutôt destinée au lecteur peu familier de la théorie de M. Gromov des espaces hyperboliques. On y rappelle quelques notions et résultats fondamentaux concernant notamment: les  $CAT(-b^2)$ -espaces, le bord d'un espace hyperbolique et ses métriques visuelles, les actions quasi-convexes d'un groupe hyperbolique et leurs ensembles limites.

Dans la deuxième partie on construit la structure conforme du bord d'un  $CAT(-1)$ -espace. On définit le flot géodésique associé à une action quasi-convexe sur un  $CAT(-1)$ -espace. Enfin on montre que la structure conforme de l'ensemble limite caractérise le flot et inversement.

Je remercie Pierre Pansu qui a dirigé ma thèse que reprend en partie cet article.

## 1. PRÉLIMINAIRES

On rappelle dans ce chapitre les notions d'espaces et de groupes hyperboliques, qui nous seront utiles par la suite. Pour plus de détails, on pourra se référer à [G], [G-H], [C-D-P], [C].

### 1.1. GÉNÉRALITÉS SUR LES ESPACES MÉTRIQUES

Sont rassemblées ici les définitions qui seront d'un usage constant.

Soient  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques. Afin d'alléger les notations, la distance  $d(x, x')$  sera souvent notée  $|x - x'|$ .

*Quasi-isométrie:* Une application  $f: X \rightarrow Y$  est une  $(\lambda, k)$ -quasi-isométrie, si quels que soient les éléments  $x, x'$  de  $X$ :

$$\lambda^{-1} |x - x'|_X - k \leq |f(x) - f(x')|_Y \leq \lambda |x - x'|_X + k.$$

On dit qu'elle est une quasi-isométrie, si l'on ne tient pas à préciser les constantes  $\lambda$  et  $k$ . Remarquons qu'une quasi-isométrie n'est pas en général continue.

*Espaces quasi-isométriques:* Les espaces métriques  $X$  et  $Y$  sont quasi-isométriques, s'ils satisfont l'une des deux conditions équivalentes suivantes:

- (i) Il existe des quasi-isométries  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow X$  et un réel  $\varepsilon \geq 0$ , tels que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  soient  $\varepsilon$ -proches de l'identité.
- (ii) Il existe une quasi-isométrie  $f: X \rightarrow Y$  et un réel  $\varepsilon \geq 0$ , tels que  $f(X)$  soit  $\varepsilon$ -dense dans  $Y$ .

Rappelons qu'un sous-ensemble  $Z$  de  $Y$  est  $\varepsilon$ -dense, si le  $\varepsilon$ -voisinage de  $Z$  dans  $Y$  est  $Y$ .

*Géodésiques:* Un segment géodésique (resp. un rayon géodésique), (resp. une géodésique) de  $X$ , est une isométrie:

$$\gamma: I \rightarrow X$$

où  $I$  est un intervalle de  $\mathbf{R}$ , fermé borné, (resp. fermé semi-infini), (resp.  $\mathbf{R}$ ).

Etant donné deux éléments  $x, x'$  de  $X$ , on notera  $[xx']$  tout segment géodésique:

$$\gamma: [a, b] \rightarrow X; \quad \text{avec} \quad \gamma(a) = x, \quad \gamma(b) = x'.$$

D'autre part, on se permettra souvent de confondre un segment géodésique, ou un rayon, ou une géodésique, avec son image.

*Espaces géodésiques:* L'espace  $X$  est géodésique, si deux éléments quelconques de  $X$  peuvent être reliés par un segment géodésique.

*Quasi-géodésiques:* Un  $(\lambda, k)$ -quasi-segment géodésique, (resp. rayon géodésique), (resp. géodésique) de  $X$ , est une  $(\lambda, k)$ -quasi-isométrie:

$$\gamma: I \rightarrow X$$

où  $I$  est un intervalle de  $\mathbf{R}$ , fermé borné, (resp. fermé semi-infini), (resp.  $\mathbf{R}$ ). Si l'on ne tient pas à préciser les constantes  $\lambda$  et  $k$ , on dira seulement quasi-segment géodésique (resp. rayon), (resp. géodésique).

*Quasi-convexe:* Supposons  $X$  géodésique. Un sous-ensemble  $Z$  de  $X$  est  $C$ -quasi-convexe, si deux points quelconques de  $Z$  peuvent être reliés par un segment géodésique contenu dans le  $C$ -voisinage de  $Z$  dans  $X$ . Il est quasi-convexe, s'il est  $C$ -quasi-convexe pour un certain réel  $C$ .

## 1.2. ESPACES HYPERBOLIQUES GÉODÉSIQUES

Désormais,  $(X, d_X)$  est un espace métrique géodésique.

### 1.2.1. DÉFINITION

a) Le triangle  $[xy] \cup [yz] \cup [zx]$  de  $X$  est  $\delta$ -fin si pour tout  $u$  appartenant à  $[xy]$ , on a:

$$d_X(u, [yz] \cup [zx]) \leq \delta .$$

b)  $X$  est  $\delta$ -hyperbolique si tout triangle de  $X$  est  $\delta$ -fin. Il est hyperbolique, s'il est  $\delta$ -hyperbolique pour un certain réel  $\delta$ .

Observons qu'un espace  $\delta$ -hyperbolique a la propriété suivante: deux segments géodésiques de mêmes extrémités, sont à distance de Hausdorff inférieure à  $\delta$ . Autrement dit, chacun est contenu dans le  $\delta$ -voisinage de l'autre.

### 1.2.2. EXEMPLES (voir [C-D-P], chapitre 1, §4 et 5).

- a) Un arbre métrique est 0-hyperbolique.
- b) L'espace hyperbolique réel  $n$ -dimensionnel  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$  est  $\log 3$ -hyperbolique.
- c) D'après le théorème de comparaison d'Aleksandrov-Toponogov, toute variété riemannienne simplement connexe à courbure  $\leq -b^2$ , est  $(\log 3/b)$ -hyperbolique.

Une première propriété fondamentale des espaces hyperboliques est:

1.2.3. THÉORÈME (Propriété des quasi-segments géodésiques). *Il existe une constante  $C$  ne dépendant que de  $\lambda, k, \delta$ , avec la propriété suivante: tout  $(\lambda, k)$ -quasi-segment géodésique d'un espace  $\delta$ -hyperbolique, est à distance de Hausdorff inférieure à  $C$ , de n'importe quel segment géodésique joignant ses extrémités.*

Dont on déduit immédiatement:

1.2.4. COROLLAIRE (Invariance de l'hyperbolicité par quasi-isométrie). *Soient  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  deux espaces géodésiques.*

- a) Si  $Y$  est hyperbolique et s'il existe une quasi-isométrie de  $X$  dans  $Y$ , alors  $X$  est hyperbolique.
- b) Si  $X$  et  $Y$  sont quasi-isométriques, alors  $X$  est hyperbolique si et seulement si  $Y$  l'est.

1.2.5. COROLLAIRE (Invariance des quasi-convexes par quasi-isométrie). Soient  $(X, d_X)$   $(Y, d_Y)$  deux espaces géodésiques et  $f$  une quasi-isométrie de  $X$  dans  $Y$ . Si  $Y$  est hyperbolique, l'image par  $f$  de tout quasi-convexe de  $X$  est un quasi-convexe de  $Y$ .

### 1.3. CAT( $-b^2$ )-ESPACES

Nous décrivons une généralisation des exemples 1.2.2. Ces espaces seront pour nous d'un intérêt particulier.

Soit  $(X, d_X)$  un espace métrique géodésique, et soit  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^2(-b^2)$  l'espace hyperbolique réel deux-dimensionnel, à courbure constante  $-b^2$ .

A tout triangle  $\Delta = [xy] \cup [yz] \cup [zx]$  de  $X$  associons un triangle  $\bar{\Delta} = [\bar{x}\bar{y}] \cup [\bar{y}\bar{z}] \cup [\bar{z}\bar{x}]$  de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^2(-b^2)$  dont les côtés ont même longueur que ceux de  $\Delta$ . Le triangle  $\bar{\Delta}$  est unique à isométrie près. Il est appelé triangle de comparaison associé à  $\Delta$ . Soit:

$$\begin{aligned} \Delta &\rightarrow \bar{\Delta} \\ s &\mapsto \bar{s} \end{aligned}$$

l'application naturelle dont la restriction à chacun des côtés de  $\Delta$  est une isométrie.

#### 1.3.1. DÉFINITION

- a) On dit que  $\Delta$  satisfait CAT( $-b^2$ ) (comparaison Aleksandrov Theorem), si quels que soient  $s, t$  appartenant à  $\Delta$ :

$$d_X(s, t) \leq d_{\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^2(-b^2)}(\bar{s}, \bar{t}).$$

- b)  $X$  est un CAT( $-b^2$ )-espace si tout triangle de  $X$  satisfait CAT( $-b^2$ ).

Les CAT( $-b^2$ )-espaces ont la plupart des propriétés des variétés riemanniennes simplement connexes à courbure  $\leq -b^2$ . En voici quelques-unes, immédiates à partir de la définition:

- a) Deux points de  $X$  déterminent un unique segment géodésique.
- b)  $X$  est  $(\log 3/b)$ -hyperbolique.
- c)  $X$  est contractible.

d) La fonction distance entre deux segments géodésiques est strictement convexe.

Une autre propriété importante, est leur caractérisation locale suivante. Elle permet de construire de nombreux exemples de  $CAT(-b^2)$ -espace, dont les fameux polyèdres hyperboliques de M. Gromov (voir [G-H] chapitre 10, [Be], [Ha]).

1.3.2. DÉFINITION-THÉORÈME. L'espace  $X$  est dit à courbure inférieure ou égale à  $-b^2$ , si tout point de  $X$  admet un voisinage satisfaisant  $CAT(-b^2)$ . Si  $X$  est géodésique simplement connexe à courbure  $\leq -b^2$ , alors  $X$  est un  $CAT(-b^2)$ -espace.

#### 1.4. BORD D'UN ESPACE HYPERBOLIQUE

Soit  $(X, d_X)$  un espace  $\delta$ -hyperbolique. Afin de lui appliquer le théorème d'Ascoli, supposons-le propre (un espace métrique est propre, si ses boules fermées sont compactes).

Définissons  $\mathcal{R}$  l'ensemble des rayons géodésiques et munissons-le de la relation d'équivalence suivante: Deux rayons sont équivalents s'ils sont à distance de Hausdorff bornée.

L'ensemble des classes d'équivalence est le bord de  $X$ , on le note  $\partial X$ .

On définit une topologie sur  $X \cup \partial X$ , de la manière suivante:

Soit  $x$  une origine dans  $X$ , et soit  $\mathcal{R}(x)$  l'ensemble des rayons et des segments géodésiques:

$$\gamma: I \rightarrow X$$

où  $I$  est un intervalle du type  $[0, +\infty[$  ou  $[0, a]$ ,  $a \in \mathbf{R}^+$ , et  $\gamma$  vérifie  $\gamma(0) = x$ . Si  $I = [0, a]$ , convenons de prolonger  $\gamma$  à  $[0, +\infty[$ , en posant  $\gamma(t) = \gamma(a)$  pour  $t$  supérieur à  $a$ . Munissons  $\mathcal{R}(x)$  de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. D'après le théorème d'Ascoli,  $\mathcal{R}(x)$  est compact et l'application naturelle de  $\mathcal{R}(x)$  dans  $X \cup \partial X$  est surjective. Equipé de la topologie quotient,  $X \cup \partial X$  est un compact, dans lequel l'espace métrique  $X$  est ouvert et dense. Ainsi le compact  $\partial X$  permet de compactifier  $X$ . On montre que la topologie est indépendante de l'origine  $x$ .

Le théorème d'Ascoli et les propriétés du paragraphe 1.2 donnent:

## 1.4.1. PROPOSITION

a) Soit  $x \in X$ , et  $\xi \in \partial X$ . Il existe un rayon géodésique d'extrémités  $x$  et  $\xi$ . On le notera  $[x\xi]$ . Deux rayons géodésiques de mêmes extrémités sont à distance de Hausdorff inférieure à  $2\delta$ .

b) Soient  $\xi$  et  $\xi'$  deux points distincts de  $\partial X$ . Il existe une géodésique d'extrémités  $\xi$  et  $\xi'$ . On la notera  $(\xi\xi')$ . Deux géodésiques de mêmes extrémités sont à distance de Hausdorff inférieure à  $4\delta$ .

c) (Propriétés des quasi-rayons géodésiques et des quasi-géodésiques). Il existe une constante  $C$  ne dépendant que de  $\delta, \lambda, k$ , avec la propriété suivante: tout  $(\lambda, k)$ -quasi-rayon géodésique (resp. quasi-géodésique) de  $X$ , est à distance de Hausdorff inférieure à  $C$  d'un rayon géodésique (resp. géodésique) de  $X$ .

1.4.2. Remarque. Lorsque  $X$  est un  $\text{CAT}(-b^2)$ -espace, deux points de  $X \cup \partial X$  déterminent un unique arc géodésique. C'est immédiat par comparaison avec  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^2(-b^2)$ .

## 1.4.3. EXEMPLES

a) Le bord d'un arbre réel propre est totalement discontinu.

b) Soit  $X$  une variété riemannienne simplement connexe, de dimension finie, à courbure inférieure à  $-b^2$ . Étant donnée une origine  $x$  dans  $X$ , l'application exponentielle de l'espace tangent en  $x$ , induit un homéomorphisme de la sphère unité sur  $\partial X$ .

c) Soit  $X$  un  $\text{CAT}(-b^2)$ -espace, et  $x$  une origine dans  $X$ . Notons  $S(x, R)$  la sphère de centre  $x$  et de rayon  $R$ . Deux points de  $X$  déterminent un unique segment géodésique, donc pour  $R \geq R'$ , il existe une application naturelle de  $S(x, R)$  dans  $S(x, R')$ . On montre que  $\partial X$  est homéomorphe à la limite projective des  $S(x, R)$ , lorsque  $R$  tend vers l'infini. Notons que le bord d'un  $\text{CAT}(-b^2)$ -espace est généralement compliqué. N. Benakli [Be] a construit des exemples (polyèdres de Gromov), dont le bord est une courbe de Menger ou de Sierpiński.

1.5. MÉTRIQUES VISUELLES SUR  $\partial X$ 

De même qu'un changement conforme de métrique sur  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$ , permet d'identifier son bord à celui de la boule euclidienne de rayon un, on peut modifier de manière «conforme» la métrique d'un espace  $\delta$ -hyperbolique  $X$ ,

afin que  $X \cup \partial X$  soit le complété de  $X$  pour cette nouvelle métrique. (Voir [G], [C-D-P], [C], pour plus de détails). Ainsi  $\partial X$  hérite d'une métrique compatible avec sa topologie. Les métriques obtenues de cette manière ont la propriété de visibilité, c'est-à-dire:

1.5.1. DÉFINITION. Soit  $x$  une origine dans  $X$ . Une métrique  $d_{\partial X}$  sur  $\partial X$  a la propriété de visibilité, si elle est reliée à celle de  $X$  de la façon suivante: Il existe une constante  $C \geq 1$  et un réel  $t > 1$ , tels que pour tous éléments  $\xi, \xi'$  de  $\partial X$ :

$$C^{-1}t^{-d} \leq d_{\partial X}(\xi, \xi') \leq Ct^{-d} .$$

avec

$$d = d_X(x, (\xi\xi')) .$$

Une telle métrique est appelée métrique visuelle de paramètres  $(x, t)$ .

L'énoncé précis est le suivant: ([G], §7.2, [C-D-P], chapitre 11):

1.5.2. THÉORÈME (Gromov). *Il existe un réel  $t_0 > 1$ , ne dépendant que de  $\delta$ , tel que pour tout  $t$  appartenant à  $]1, t_0[$ , le bord de  $X$  admette une métrique visuelle de paramètres  $(x, t)$ .*

### 1.5.3. Remarques

a) Pour les CAT( $-b^2$ )-espaces, le résultat est plus fin: leur bord admet une métrique visuelle de paramètre  $t$ , quel que soit  $t$  appartenant à  $]1, e^b[$ . Une manière de le montrer est d'utiliser les idées de W. J. Floyd [F]. Nous en proposerons une autre au paragraphe 2.5. Notons que  $e^b$  est optimal car il l'est sur  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n(-b^2)$ .

b) Deux métriques visuelles  $d$  et  $d'$  de paramètres respectifs  $(x, t)$  et  $(x', t')$  sont facilement comparables: Si  $t = t'$ , alors elles sont Lipschitz-équivalentes: il existe une constante  $D \geq 1$ , telle que:

$$D^{-1}d \leq d' \leq Dd .$$

Sinon, elles sont Hölder-équivalentes: il existe une constante  $D \geq 1$  et un réel  $\alpha > 0$ , tels que:

$$D^{-1}d^\alpha \leq d' \leq Dd^\alpha .$$

Ici  $\alpha$  est égal à  $\log t' / \log t$ .

c) D'après b), toute isométrie de  $X$  est un homéomorphisme bi-Lipschitz du bord de  $X$  muni d'une métrique visuelle.

## 1.6. ACTION AU BORD DES QUASI-ISOMÉTRIES

Commençons par rappeler la définition d'application quasi-conforme.

Un  $k$ -anneau,  $k \geq 1$ , d'un espace métrique  $(E, d)$ , est un couple  $(B_1, B_2)$  de deux boules concentriques, dont les rayons  $r_1$  et  $r_2$  vérifient la relation:

$$r_2 = kr_1.$$

Une application:

$$f: (E, d) \rightarrow (E', d')$$

est quasi-conforme (au sens des anneaux), s'il existe une fonction  $\psi$  de  $[1, +\infty[$  dans lui-même, telle que l'image par  $f$  de tout  $k$ -anneau est contenue dans un  $\psi(k)$ -anneau de  $(E', d')$ . Autrement dit, si  $(B_1, B_2)$  est un  $k$ -anneau de  $(E, d)$ , alors il existe un  $\psi(k)$ -anneau  $(B'_1, B'_2)$  de  $(E', d')$ , tel que:

$$B'_1 \subset f(B_1) \subset f(B_2) \subset B'_2.$$

Notons en particulier que l'image d'une boule de  $(E, d)$  est contenue dans un  $\psi(1)$ -anneau de  $(E', d')$ .

Un homéomorphisme  $f$  est quasi-conforme si  $f$  et  $f^{-1}$  sont quasi-conformes. De même, un plongement est quasi-conforme, s'il est un homéomorphisme quasi-conforme sur son image.

Afin de décrire les boules, et par suite les anneaux d'une métrique visuelle sur le bord d'un espace  $\delta$ -hyperbolique, rappelons la notion classique d'ombre:

1.6.1. DÉFINITION (Margulis). Soit  $x$  une origine dans  $X$ . L'ombre portée à partir de  $x$ , de la boule  $B(y, R)$  de  $X$ , est le sous-ensemble de  $\partial X$

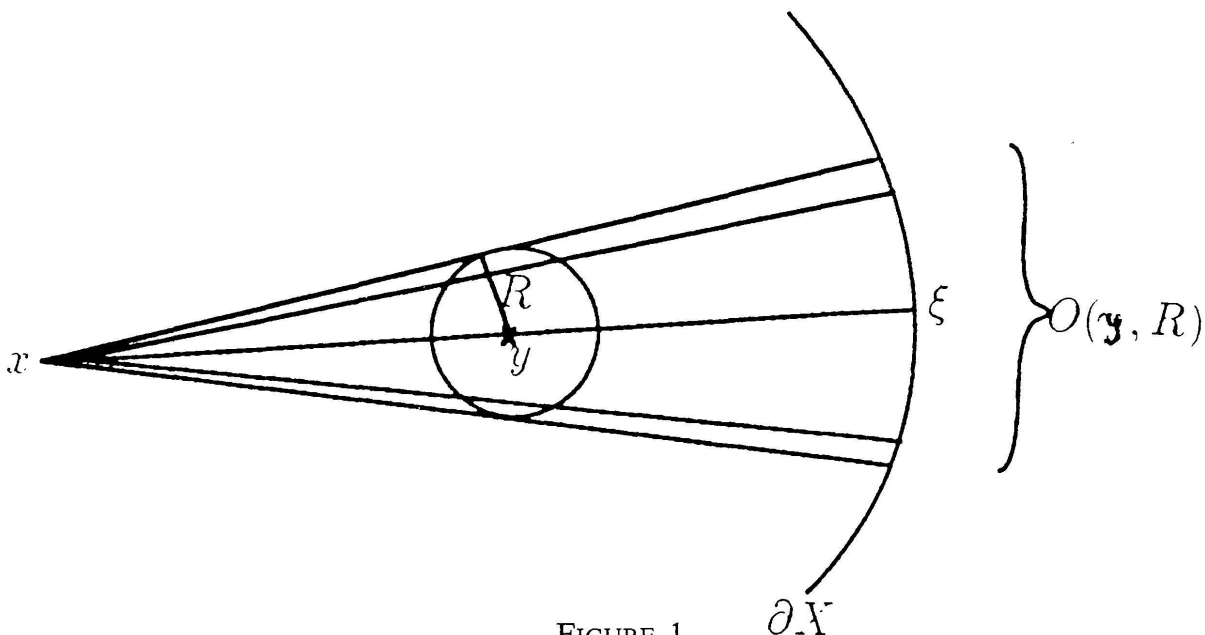


FIGURE 1

noté  $O(y, R)$ , des extrémités des rayons géodésiques issus de  $x$  passant par  $B(y, R)$ . On dit que  $O(y, R)$  est centrée en  $\xi$ , si  $y$  appartient à un rayon géodésique  $[x\xi]$ . (Voir figure 1).

Etant donnée une métrique visuelle  $d$  de paramètres  $(x, t)$  sur  $\partial X$ , à l'ombre  $O(y, R)$  attachons le rayon:

$$r(y) = t^{-|x-y|}.$$

La propriété de visibilité donne alors:

1.6.2. LEMME. *Pour  $R$  suffisamment grand, ( $R \geq 5\delta$  convient), il existe une constante  $D = D(R) \geq 1$ , telle que pour toute boule  $B(\xi, r)$  de  $(\partial X, d)$ , on puisse trouver des ombres  $O(y_1, R)$  et  $O(y_2, R)$  centrées en  $\xi$ , vérifiant:*

$$O(y_1, R) \subset B(\xi, r) \subset O(y_2, R)$$

et

$$D^{-1}r(y_2) \leq r \leq Dr(y_1).$$

Ainsi, les boules de  $(\partial X, d)$  ressemblent aux ombres.

*Preuve de 1.6.2.* Rappelons qu'il existe une constante  $C \geq 1$  telle que pour tout point  $\xi, \xi'$  de  $\partial X$  on ait:

$$(1) \quad C^{-1}t^{-d} \leq d(\xi, \xi') \leq Ct^{-d} \quad \text{avec} \quad d = d_X(x, (\xi\xi')).$$

D'autre part observons que tout triangle de  $X \cup \partial X$  est  $5\delta$ -fin (voir 1.4.1.b)).

Soit  $R \geq 5\delta$ ,  $\xi$  un point de  $\partial X$ ,  $B(\xi, r)$  une boule de  $\partial X$  centrée en  $\xi$ , et  $\gamma$  un rayon géodésique joignant  $x$  à  $\xi$ . Prenons  $y_2$  le point de  $\gamma$  vérifiant:

$$|x - y_2| = \max\{0, -\log_t Cr - 5\delta - 1\}$$

et montrons que  $B(\xi, r)$  est contenue dans  $O(y_2, R)$ . Soit  $\xi'$  un point de  $B(\xi, r)$ , le triangle  $(x\xi\xi')$  étant  $5\delta$ -fin, on a:

$$d(y_2, [x\xi'] \cup (\xi\xi')) \leq 5\delta.$$

Or par l'inégalité triangulaire et (1):

$$\begin{aligned} d(y_2, (\xi\xi')) &\geq d(x, (\xi\xi')) - |x - y_2| \\ &\geq -\log_t Cr - |x - y_2| \\ &\geq 5\delta + 1 \end{aligned}$$

donc:  $d(y_2, [x\xi']) \leq 5\delta \leq R$  et  $\xi$  appartient à  $O(y_2, R)$ .

Prenons  $y_1$  le point de  $\gamma$  vérifiant:

$$|x - y_1| = -\log_t \frac{r}{C} + R + 10\delta$$

(d'après (1),  $r \leq C$ , donc  $-\log_t(r/C) + R + 10\delta \geq 0$ ) et montrons que  $B(\xi, r)$  contient  $O(y_1, R)$ . Soit  $\xi'$  un point de  $O(y_1, R)$ ,  $\gamma'$  un rayon géodésique joignant  $x$  à  $\xi$  passant par  $B(y_1, R)$ ,  $P$  un point appartenant à  $\gamma \cap B(y_1, R)$  et  $Q$  un point de  $(\xi\xi')$  vérifiant:

$$|x - Q| = d(x, (\xi\xi')) .$$

Considérons le quadrilatère  $(y_1 P \xi \xi')$ , en le subdivisant en deux triangles, on voit qu'il est  $10\delta$ -fin, aussi:

$$d(Q, [Py_1] \cup [P\xi'] \cup [y_1\xi]) \leq 10\delta .$$

D'autre part:

$$d(x, [Py_1] \cup [P\xi'] \cup [y_1\xi]) \geq |x - y_1| - R .$$

Donc:

$$\begin{aligned} d(x, (\xi\xi')) &= |x - Q| \\ &\geq d(x, [Py_1] \cup [P\xi'] \cup [y_1\xi]) - d(Q, [Py_1] \cup [P\xi'] \cup [y_1\xi]) \\ &\geq |x - y_1| - R - 10\delta = -\log_t \frac{r}{C} \end{aligned}$$

alors d'après (1),  $d(\xi, \xi') \leq r$  et  $\xi'$  appartient à  $B(\xi, r)$ .

On a donc trouvé deux ombres centrées en  $\xi$  qui vérifient:

$$O(y_1, R) \subset B(\xi, r) \subset O(y_2, R) .$$

Leurs rayons satisfont:

$$r(y_1) = t^{-R-10\delta} C^{-1} r \quad \text{et} \quad r(y_2) \leq t^{5\delta+1} C r .$$

Posons  $D = \max\{t^{R+10\delta} C, t^{5\delta+1} C\}$ . On obtient:

$$D^{-1} r(y_2) \leq r \leq D r(y_1) . \quad \square$$

De manière symétrique, on a aussi:

1.6.3. LEMME. *Pour  $R$  suffisamment grand ( $R \geq 5\delta$  convient), il existe une constante  $E = E(R) \geq 1$ , telle que pour tout  $\xi \in \partial X$  et toute ombre  $O(y, R)$  centrée en  $\xi$ , on puisse trouver des boules  $B(\xi, r_1)$  et  $B(\xi, r_2)$  de  $(\partial X, d)$  vérifiant:*

$$B(\xi, r_1) \subset O(y, R) \subset B(\xi, r_2)$$

avec

$$E^{-1}r_2 \leq r(y) \leq Er_1 .$$

*Preuve de 1.6.3.* Elle est semblable à la précédente, donnons-la néanmoins. On reprend les notations de la preuve de 1.6.2.

Soit  $r_1 = C^{-1}t^{-5\delta-1}r(y)$ , montrons que  $B(\xi, r_1)$  est contenue dans  $O(y, R)$ . Soit  $\xi'$  un point de  $B(\xi, r_1)$ . Le triangle  $(x\xi\xi')$  étant  $5\delta$ -fin, on a :

$$d(y, [x\xi'] \cup (\xi\xi')) \leq 5\delta .$$

D'autre part, d'après l'inégalité triangulaire, les inégalités (1) et le choix de  $r_1$  :

$$\begin{aligned} d(y, (\xi\xi')) &\geq d(x, (\xi\xi')) - |x - y| \\ &\geq -\log_t d(\xi, \xi') - \log_t C + \log_t r(y) \\ &\geq 5\delta + 1 \end{aligned}$$

donc  $d(y, [x\xi']) \leq 5\delta \leq R$  et  $\xi'$  appartient à  $O(y, R)$ .

Soit  $r_2 = Ct^{R+10\delta}r(y)$ . Montrons que  $B(\xi, r_2)$  contient  $O(y, R)$ . Soit  $\xi'$  un point de  $O(y, R)$ ; comme dans la preuve de 1.6.2, on a :

$$d(x, (\xi\xi')) \geq |x - y| - R - 10\delta .$$

Donc d'après (1) et le choix de  $r_2$  :

$$d(\xi, \xi') \leq Ct^{R+10\delta}r(y) = r_2$$

et  $\xi'$  appartient à  $B(\xi, r_2)$ .

Posons  $E = \max\{Ct^{5\delta+1}, Ct^{R+10\delta}\}$ , on obtient

$$E^{-1}r_2 \leq r(y) \leq Er_1 . \quad \square$$

D'après la propriété des quasi-rayons géodésiques dans un espace hyperbolique, l'image d'une ombre se compare aisément à une ombre. Ainsi, et en utilisant les lemmes 1.6.2 et 1.6.3, on obtient la généralisation suivante d'un théorème de Margulis.

1.6.4. THÉORÈME. *Soit  $X$  et  $X'$  deux espaces hyperboliques. Supposons leurs bords équipés de métriques visuelles.*

- a) *Toute quasi-isométrie  $f$  de  $X$  dans  $X'$  s'étend en un plongement quasi-conforme, bi-Hölder, de  $\partial X$  dans  $\partial X'$ .*
- b) *Si  $X$  et  $X'$  sont quasi-isométriques, leurs bords se correspondent par un homéomorphisme quasi-conforme bi-Hölder.*

*Preuve de 1.6.4.* Il suffit de montrer a). Soit  $x$  une origine dans  $X$ , prenons pour origine de  $X'$  le point  $f(x)$ . Soit respectivement  $d$  et  $d'$  des métriques visuelles de paramètre  $(x, t)$  et  $(f(x), t')$  sur  $\partial X$  et  $\partial X'$ .

Par la propriété des quasi-rayons géodésiques (1.4.1.c)),  $f$  s'étend en une application de  $\partial X$  dans  $\partial X'$ , notée  $\partial f$ . C'est un plongement bi-Hölder à cause des définitions des métriques visuelles et de la propriété des quasi-géodésiques.

Pour montrer que  $\partial f$  est un plongement quasi-conforme, on utilise les ombres:

Soit  $\xi$  un point de  $\partial X$ ,  $y_2$  et  $y_1$  deux points dans cet ordre sur  $[x\xi)$ ,  $O(y_1, R)$  et  $O(y_2, R)$  les ombres portées depuis  $x$  des boules  $B(y_1, R)$  et  $B(y_2, R)$  de  $X$ . Par la propriété des quasi-rayons géodésiques, il existe des constantes  $R_1 > 0$  et  $R_2 > 0$  qui ne dépendent que de  $R$ , des constantes de quasi-isométrie de  $f$  et de l'hyperbolicité de  $X$  et de  $X'$ ; avec les propriétés suivantes: Notons  $y'_1$  et  $y'_2$  les projections de  $f(y_1)$  et de  $f(y_2)$  sur  $[f(x)\partial f(\xi))$ . Soit  $O(y'_1, R_1)$  et  $O(y'_2, R_2)$  les ombres portées depuis  $f(x)$  des boules  $B(y'_1, R_1)$  et  $B(y'_2, R_2)$  de  $X'$ ; elles sont centrées en  $\partial f(\xi)$ . Alors si  $R$  a été choisi suffisamment grand:

$$\begin{aligned} O(y'_1, R_1) \cap \partial f(\partial X) &\subset \partial f(O(y_1, R)) \\ &\subset \partial f(O(y_2, R)) \subset O(y'_2, R_2) \cap \partial f(\partial X) . \end{aligned}$$

De plus le rapport des rayons des ombres  $O(y'_1, R_1)$  et  $O(y'_2, R_2)$  est borné par une fonction du rapport des rayons de  $O(y_1, R)$  et de  $O(y_2, R)$  qui ne dépend que des constantes de quasi-isométrie de  $f$ , de l'hyperbolicité de  $X$  et de  $X'$ , et des paramètres  $t$  et  $t'$ .

Alors les lemmes 1.6.2 et 1.6.3 montrent que  $\partial f$  est quasi-conforme sur son image. De façon analogue,  $\partial f^{-1}$  est quasi-conforme de  $\partial f(\partial X)$  sur  $\partial X$ . Ainsi  $\partial f$  est un plongement quasi-conforme.  $\square$

1.6.4. *Remarque.* Deux métriques  $d_1$  et  $d_2$  sur un même espace  $E$  sont dites quasi-conformes si l'identité de  $(E, d_1)$  sur  $(E, d_2)$  est un homéomorphisme quasi-conforme. Clairement la composée de deux applications quasi-conformes est quasi-conforme. Aussi, la relation: « $d_1$  et  $d_2$  sont quasi-conformes», est une relation d'équivalence sur l'ensemble des métriques de  $E$ . La classe d'équivalence d'une métrique  $d$  de  $E$  est appelée structure quasi-conforme de  $(E, d)$ . (Voir [Pan] pour une définition plus générale). Le théorème 1.6.4.(b) indique que la structure quasi-conforme d'une métrique visuelle sur  $\partial X$ , est un invariant de quasi-isométrie de  $X$ .

## 1.7. GROUPES HYPERBOLIQUES

Soit  $\Gamma$  un groupe de type fini et  $S = \{a_i, i = 1, \dots, s\}$  un système de générateurs de  $\Gamma$ . Supposons  $S$  symétrique, c'est-à-dire:

$$\forall i \in \{1, \dots, s\}; a_i \neq e$$

et

$$a_i \in S \Rightarrow a_i^{-1} \in S.$$

La métrique des mots relative à  $S$ , est définie de la manière suivante:

$$|g - g'|_S = \inf\{n \in \mathbf{N} \mid g^{-1}g' = a_{i_1} \dots a_{i_n}, a_{i_k} \in S\}.$$

La distance  $|e - g|_S$  sera généralement notée  $|g|_S$ . Observons que  $\Gamma$  agit à gauche par isométries sur  $(\Gamma, ||_S)$ .

Le graphe de Cayley  $\mathcal{G}(\Gamma, S)$  est un 1-complexe simplicial géodésique et propre, dans lequel  $(\Gamma, ||_S)$  est plongé isométriquement. Ses sommets sont les éléments de  $\Gamma$ , deux sommets  $g, g'$  sont reliés par une arête si  $g^{-1}g' \in S$ , c'est-à-dire si  $|g - g'|_S = 1$ . Il est muni de la métrique simpliciale, c'est-à-dire de la métrique de longueur qui donne à chaque arête une longueur un.

1.7.1. DÉFINITION. Le groupe  $\Gamma$  est hyperbolique si l'espace métrique géodésique propre  $\mathcal{G}(\Gamma, S)$  est hyperbolique.

D'après l'invariance de l'hyperbolicité par quasi-isométrie, cette définition est indépendante du système de générateurs  $S$ . En effet, si  $S'$  en est un autre,  $(\Gamma, ||_S)$  et  $(\Gamma, ||_{S'})$ , et par suite  $\mathcal{G}(\Gamma, S)$  et  $\mathcal{G}(\Gamma, S')$  sont quasi-isométriques.

1.7.2. EXEMPLES ET PROPRIÉTÉS. Sont hyperboliques:

- a) Les groupes finis.
- b) Les groupes libres de type fini.
- c) Les groupes à petite simplification  $C'(1/6)$ . (Voir [G-H], Appendice.)

Un groupe hyperbolique jouit des propriétés suivantes:

- a) Il est de présentation finie, et «presque tout» groupe de présentation finie est hyperbolique (voir [Ch], théorème 1.3.2).
- b) Il ne contient qu'un nombre fini de classes de conjugaison d'éléments de torsion (voir [Ch], p. 20).
- c) Il ne contient aucun sous-groupe abélien de rang supérieur ou égal à 2.

d) Ou bien il est fini, ou bien il est une extension finie de  $\mathbf{Z}$ , ou bien il contient un groupe libre de rang au moins deux. Dans les deux premiers cas il est dit élémentaire. S'il est non élémentaire, il est à croissance exponentielle ([G-H], chapitre 8, théorème 37).

e) Il est automatique (voir [C-D-P], [C-E-H-P-T]).

## 1.8. GROUPES QUASI-CONVEXES

1.8.1. DÉFINITION. Soit  $X$  un espace métrique géodésique propre, et  $x$  un élément de  $X$ . Un sous-groupe d'isométries de  $X$  est quasi-convexe, s'il est proprement discontinu, et si l'orbite de  $x$  est un quasi-convexe de  $X$ .

On vérifie que la définition est indépendante du point  $x$  choisi. Notons qu'un sous-groupe d'isométries proprement discontinu cocompact, est quasi-convexe. La propriété de  $X$  permet de montrer:

1.8.2. PROPOSITION. *Un groupe quasi-convexe  $\Gamma$  d'isométries de  $X$ , est de type fini. De plus, si  $S$  est un système symétrique de générateurs de  $\Gamma$ , l'application:*

$$\begin{aligned} (\Gamma, ||_S) &\rightarrow X \\ g &\mapsto gx \end{aligned}$$

*est une quasi-isométrie.*

Pour montrer cette proposition, il suffit d'exhiber un système de générateurs  $S$  adéquat. Si l'orbite de  $x$  est  $C$ -quasi-convexe, on vérifie que l'ensemble:

$$S = \{a_i \in \Gamma - \{e\} \mid |x - a_i x|_X \leq 2C + 1\}$$

convient.

Supposons maintenant  $X$  hyperbolique. Alors, par l'invariance de l'hyperbolicité par quasi-isométrie:

1.8.3. COROLLAIRE. *Tout groupe quasi-convexe d'isométries d'un espace hyperbolique, est hyperbolique.*

Par l'invariance des quasi-convexes par quasi-isométries, on obtient la caractérisation suivante des groupes quasi-convexes:

1.8.4. COROLLAIRE. *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe d'isométries d'un espace hyperbolique  $X$ . Les assertions suivantes sont équivalentes:*

a)  $\Gamma$  est quasi-convexe.

b)  $\Gamma$  est de type fini, et quels que soient le système symétrique de générateurs  $S$  de  $\Gamma$ , et l'élément  $x$  de  $X$ , l'application

$$\begin{aligned} (\Gamma, ||_S) &\rightarrow X \\ g &\mapsto gx \end{aligned}$$

est une quasi-isométrie.

Rappelons que l'ensemble limite  $\Lambda$  d'un sous-groupe d'isométries  $\Gamma$  de  $X$  est défini de la manière suivante:

Soit  $x \in X$ , considérons  $\overline{\Gamma\{x}}$  l'adhérence de l'orbite de  $x$  dans le compact  $X \cup \partial X$ . Alors:

$$\Lambda = \overline{\Gamma\{x}} \cap \partial X.$$

Il est compact et indépendant du point  $x$  choisi.

Si maintenant  $\Gamma$  est quasi-convexe, alors d'après le théorème 1.6.4, la quasi-isométrie:

$$\begin{aligned} \Gamma &\rightarrow X \\ g &\mapsto gx \end{aligned}$$

s'étend en un plongement quasi-conforme, bi-Hölder, de  $\partial\Gamma$  dans  $\partial X$ . Clairement il est indépendant du point  $x$  choisi, et son image est  $\Lambda$ . Dès lors:

1.8.5. COROLLAIRE. *Le bord d'un groupe quasi-convexe d'isométries d'un espace hyperbolique, et son ensemble limite, se correspondent par un homéomorphisme quasi-conforme, bi-Hölder, canonique.*

Nous donnons une dernière caractérisation des groupes quasi-convexes d'isométries d'un espace hyperbolique  $X$ . Celle-ci permet de faire le lien avec les groupes convexes cocompacts de Thurston. Soit  $E$  un sous-ensemble de  $\partial X$ . Son enveloppe de Gromov, notée  $Q(E)$ , est l'ensemble des (images des) géodésiques dont les deux extrémités appartiennent à  $E$ . C'est un quasi-convexe de  $X$ . Si  $\Gamma$  est un sous-groupe d'isométries de  $X$ , l'enveloppe de Gromov de son ensemble limite est  $\Gamma$ -invariante; et on a (voir [C]):

1.8.6. PROPOSITION.  *$\Gamma$  est quasi-convexe si et seulement si il est proprement discontinu et si  $Q(\Lambda)/\Gamma$  est compact.*

1.8.7. EXEMPLES. Soit  $\Gamma$  un sous-groupe d'isométries de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$ . Rappelons que  $\Gamma$  est convexe cocompact, s'il est proprement discontinu, et s'il

agit de manière cocompacte sur l'enveloppe convexe  $H(\Lambda)$  de son ensemble limite. Il est quasi-convexe si et seulement si il est convexe cocompact. En effet,  $Q(\Lambda)$  et  $H(\Lambda)$  sont à distance de Hausdorff finie. Une manière de le montrer est la suivante (voir [C]): Le convexe  $H(\Lambda)$  est la réunion des  $n$ -simplexes idéaux de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$ , dont les arêtes sont des géodésiques de  $Q(\Lambda)$  (c'est un théorème de Carathéodory appliqué au modèle de Klein de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$  (voir [Ber], théorème 11.1.8.6)). Or tout point d'un  $n$ -simplexe de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$  est à distance majorée par une constante universelle  $C(n)$ , de ses arêtes.

Signalons aussi que  $\Gamma$  est convexe cocompact si et seulement si il est géométriquement fini sans parabolique (une conséquence de la décomposition de Margulis en parties fines et épaisses).

Enfin, tout groupe fuchsien de type fini est géométriquement fini (voir [Bea], chapitre 10). Aussi, un groupe fuchsien est quasi-convexe si et seulement si il est de type fini sans parabolique.

## 2. STRUCTURE CONFORME SUR LE BORD D'UN $\text{CAT}(-1)$ -ESPACE

### ENSEMBLE LIMITE ET FLOT GÉODÉSIQUE ASSOCIÉS

#### À UNE ACTION QUASI-CONVEXE

### 2.0. INTRODUCTION

Soit  $X$  un  $\text{CAT}(-1)$ -espace. Nous montrons que son bord admet une structure conforme canonique, compatible avec sa structure quasi-conforme. Plus précisément, nous construisons sur  $\partial X$  une famille de métriques visuelles  $\{d_x, x \in X\}$ , deux à deux conformes, qui ont la propriété que les isométries de  $X$  soient des applications conformes de  $(\partial X, d_x)$ .

Rappelons qu'une application  $f: (A, d_A) \rightarrow (B, d_B)$  est conforme, si quel que soit  $a_0 \in A$ , la limite lorsque  $a$  tend vers  $a_0$  de

$$\frac{d_B(f(a), f(a_0))}{d_A(a, a_0)}$$

existe et est finie non nulle. On l'appellera le facteur conforme de  $f$  en  $a_0$ . Rappelons également que deux métriques  $d_1, d_2$  sur  $A$ , sont conformes, si l'identité  $(A, d_1) \rightarrow (A, d_2)$  est conforme.

Soit maintenant une action isométrique quasi-convexe d'un groupe hyperbolique  $\Gamma$  sur un  $\text{CAT}(-1)$ -espace  $X$ . A cette action sont associés:

— L'ensemble limite de  $\Gamma$  dans  $\partial X$ , muni de la structure conforme induite, sur lequel agit  $\Gamma$  par transformations conformes.