Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 41 (1995)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: STRUCTURE CONFORME AU BORD ET FLOT GÉODÉSIQUE D'UN CAT(- 1)-ESPACE

Autor: Bourdon, Marc

Kapitel: Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61817

INTRODUCTION

On étudie ici les actions isométriques quasi-convexes d'un groupe hyperbolique au sens de M. Gromov, sur les CAT(-1)-espaces. Ces espaces, qui remontent à Aleksandrov, connaissent depuis quelque temps déjà un regain d'intérêt sous l'impulsion de M. Gromov. Ils forment une vaste généralisation des variétés riemanniennes simplement connexes à courbure inférieure à -1, les exemples les plus fameux étant les polyèdres hyperboliques de M. Gromov. Nous nous intéressons plus particulièrement au flot géodésique associé à une action quasi-convexe sur un tel espace, et à l'action du groupe sur son ensemble limite. Le principal résultat est le suivant:

Comme tout espace hyperbolique, un CAT(-1)-espace X admet un bord, lui-même muni d'une structure quasi-conforme canonique (un invariant de quasi-isométrie de X). La propriété CAT(-1) permet d'affiner cette structure: nous construisons sur ∂X une structure conforme canonique compatible avec sa structure quasi-conforme et invariante par les isométries de X. Elle est décrite par une famille de métriques visuelles deux à deux conformes que nous construisons à partir des fonctions de Busemann.

Soit maintenant une action isométrique quasi-convexe d'un groupe hyperbolique Γ sur un CAT(-1)-espace X. On sait que l'ensemble limite de Γ dans ∂X et le flot géodésique sont intimement liés au groupe. En effet si Γ agit comme précédemment sur deux CAT(-1)-espaces, alors les ensembles limites associés (qui sont canoniquement homéomorphes à $\partial\Gamma$) se correspondent par un homéomorphisme Ω, canonique, Γ-équivariant et quasi-conforme. De même, d'après une construction de M. Gromov, les espaces du flot géodésique se correspondent par une équivalence d'orbites (un homéomorphisme envoyant orbites sur orbites sans préserver en général le paramétrage). Nous montrons que l'homéomorphisme quasi-conforme Ω est conforme si et seulement si l'équivalence d'orbites de M. Gromov est réalisée par une conjugaison des flots géodésiques (une équivalence d'orbites qui préserve le paramétrage). Ainsi la structure conforme de l'ensemble limite détermine le flot géodésique et inversement. La preuve de ce résultat consiste en grande partie à adapter aux CAT(-1)-espaces certaines idées développées par Hopf, Patterson, Sullivan sur les variétés à courbure -1; en particulier les mesures conformes sur l'ensemble limite, et les mesures induites sur le carré de l'ensemble limite et sur l'espace du flot géodésique.

La première partie de cet article est plutôt destinée au lecteur peu familier de la théorie de M. Gromov des espaces hyperboliques. On y rappelle quelques notions et résultats fondamentaux concernant notamment: les CAT$(-b^2)$-espaces, le bord d'un espace hyperbolique et ses métriques visuelles, les actions quasi-convexes d'un groupe hyperbolique et leurs ensembles limites.

Dans la deuxième partie on construit la structure conforme du bord d'un CAT(-1)-espace. On définit le flot géodésique associé à une action quasi-convexe sur un CAT(-1)-espace. Enfin on montre que la structure conforme de l'ensemble limite caractérise le flot et inversement.

Je remercie Pierre Pansu qui a dirigé ma thèse que reprend en partie cet article.

1. Préliminaires

On rappelle dans ce chapitre les notions d'espaces et de groupes hyperboliques, qui nous seront utiles par la suite. Pour plus de détails, on pourra se référer à [G], [G-H], [C-D-P], [C].

1.1. Généralités sur les espaces métriques

Sont rassemblées ici les définitions qui seront d'un usage constant.

Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques. Afin d'alléger les notations, la distance $d(x, x')$ sera souvent notée $|x - x'|$.