

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 41 (1995)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** DENSITÉ DANS DES FAMILLES DE RÉSEAUX. APPLICATION AUX RÉSEAUX ISODUAUX  
**Autor:** Bergé, Anne-Marie / Martinet, Jacques  
**Kapitel:** 2. Exemples  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61830>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

(notion introduite par Conway et Sloane dans l'appendice de [B-S], voir aussi [C-S3]).

La caractérisation des réseaux strictement extrêmes est l'objet des §§ 3 et 4.

Le § 5 est consacré à une classification des réseaux de la famille  $\mathcal{F}$  selon la configuration de leurs vecteurs minimaux. On en déduit la finitude du nombre de réseaux extrêmes (modulo similitudes) dans le cas des  $G$ -réseaux (résultat obtenu antérieurement par Jaquet dans [Ja]) et dans celui des réseaux isoduaux.

Les réseaux isoduaux sont l'objet des §§ 6 à 8. On étudie plus particulièrement au § 7 les notions de réseaux isoduaux symplectiques et orthogonaux (la première notion est celle de [C-S2]), et l'on classe au § 8 jusqu'à la dimension 4 les réseaux symplectiques qui sont extrêmes en tant que réseaux isoduaux. La méthode utilisée repose sur l'introduction au § 6 de la notion plus générale de *réseau normal* (cf. déf. 6.5).

Les auteurs remercient Christophe Bavard pour ses remarques.

## 2. EXEMPLES

Soit  $\mathcal{G}$  un sous-groupe fermé de  $\mathrm{Gl}(E)$  et soit  $L_0$  un réseau de  $E$ . La constante d'Hermite prend les mêmes valeurs sur les images de  $L_0$  par  $\mathcal{G}$  et par le groupe  $\mathbf{R}^*\mathcal{G}$  engendré par  $\mathcal{G}$  et les homothéties positives. Si  $\mathcal{G}$  contient les homothéties positives, soit  $\mathcal{G}'$  son sous-groupe formé des éléments de déterminant  $\pm 1$ . Alors, on a  $\mathcal{G} = \mathbf{R}_+^* \mathcal{G}'$ , et ce produit est direct, si bien que  $\mathcal{G}$  est connexe si et seulement si  $\mathcal{G}'$  l'est. Pour l'étude de l'invariant d'Hermite, il est indifférent de considérer  $\mathcal{G}$  ou  $\mathcal{G}'$ , et ce dernier choix permet de se restreindre aux réseaux de déterminant 1.

L'une des formes du *théorème de compacité de Mahler* est l'assertion suivante: *une famille de réseaux de déterminants bornés et de normes minorées par une constante strictement positive est d'adhérence compacte*. Soit  $\mathcal{F}$  une famille de réseaux de la forme  $\mathcal{G}L_0$  pour un groupe comme ci-dessus et soit  $\gamma = \sup_{L \in \mathcal{F}} \gamma(L)$ . Soit  $L_p$  une suite de réseaux de  $\mathcal{F}$  sur laquelle  $\gamma(L_p)$  tend vers  $\gamma$ . Si  $\mathcal{G}$  est de déterminant 1, le théorème de compacité de Mahler s'applique à la suite  $L_p$ , dont on peut extraire une sous-suite convergente dans  $\mathcal{R}$ , et le cas d'un groupe contenant les homothéties positives se ramène au précédent. Si la famille  $\mathcal{F}$  est fermée dans  $\mathcal{R}$ , ce qui est le cas dans les exemples ci-dessous, puisque  $\mathcal{G}$  est fermé dans  $\mathrm{Gl}(E)$ , la borne  $\gamma$  est alors atteinte sur  $\mathcal{F}$  et l'existence de réseaux critiques pour  $\mathcal{F}$  est assurée.

Dans de nombreux exemples, le groupe  $\mathcal{G}$  est l'ensemble des éléments  $u$  d'une sous-algèbre  $A$  de  $\text{End}(E)$  munie d'une involution  $\iota$  d'une algèbre d'endomorphismes qui vérifient l'égalité  $uu^\iota = 1$ . Dans ce cas, l'espace tangent  $\mathcal{C}(\mathcal{G})$  en l'élément neutre du groupe  $\mathcal{G}$  est donné par la formule

$$\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \{v \in A \mid v^\iota = -v\}$$

(Bourbaki, Lie III, p. 145, prop. 37). La détermination de l'espace  $\mathcal{C}$  se fait ensuite en observant que  $\mathcal{C}$  est l'image de  $\mathcal{C}(\mathcal{G})$  par l'application  $v \mapsto \iota v + v$ .

2.1. EXEMPLE. L'ESPACE DES RÉSEAUX DE  $E$ . Ici, la famille  $\mathcal{F}$  est l'ensemble  $\mathcal{R}$  de tous les réseaux de  $E$ . On prend  $\mathcal{G} = \text{Gl}^+(E)$  et  $\mathcal{C} = \text{End}^s(E)$ . Voronoï a montré que les réseaux extrêmes sont les réseaux parfaits et eutactiques, qu'ils sont strictement extrêmes, et que le nombre de classes de similitude de réseaux parfaits est fini. De plus, Korkine et Zolotareff ([K-Z]) ont montré que les réseaux parfaits sont rationnels (i.e. proportionnels à des réseaux entiers). Les questions soulevées dans l'introduction sont donc toutes résolues dans ce cas. En outre, Voronoï a donné un algorithme permettant de trouver tous les réseaux parfaits à partir de l'un d'entre eux.

2.2. EXEMPLE. L'ESPACE DES  $G$ -RÉSEAUX. On se donne un sous-groupe fini  $G$  du groupe orthogonal  $O(E)$ , et l'on considère la famille  $\mathcal{R}_G$  des réseaux stables par  $G$ . On peut prendre pour  $\mathcal{G}$  le commutant de  $G$  dans  $\text{Gl}(E)$  (ou sa composante connexe neutre). L'espace  $\mathcal{C}$  est le commutant de  $G$  dans  $\text{End}^s(E)$ . La caractérisation des réseaux « $G$ -extrêmes» comme réseaux  $\mathcal{C}$ -parfaits et  $\mathcal{C}$ -eutactiques est démontrée dans [B-M2] (th. 2.10), mais la démonstration de la finitude des classes de similitude de réseaux  $G$ -parfaits (prop. 3.12) est incorrecte. [Il n'est pas prouvé que les changements de bases utilisés dans la démonstration de 3.12 puissent se faire par des éléments de  $\mathcal{G}$ .] Une démonstration correcte vient d'être obtenue par Jaquet ([Ja]). Une autre démonstration en est proposée à la fin du §6. Un «algorithme de Voronoï» est exposé dans [B-M-S]. Les composantes connexes du graphe de Voronoï sont en bijection avec les classes de représentations intégrales de  $G$  ([B-M-S], th. 2.9).

2.3. EXEMPLE. LES RÉSEAUX DUAL-EXTRÊMES. Il s'agit d'une notion introduite dans [B-M1]. On définit un «invariant d'Hermite dual»  $\gamma'$  par  $\gamma'(L) = (N(L)N(L^*))^{1/2}$  ( $L^* = \{x \in E \mid \forall y \in E, x \cdot y \in \mathbb{Z}\}$  est le *réseau dual* de  $L$ ). On a la relation de moyenne  $\gamma'(L) = (\gamma(L)\gamma(L^*))^{1/2}$  et l'égalité  $\gamma'(L)$

$= \gamma'(L^*)$ . On dit qu'un réseau est *dual-extrême* s'il réalise un maximum local de  $\gamma'$ . Considérons alors dans l'espace  $E \times E$  de dimension  $2n$  la famille  $\mathcal{F}$  des sommes orthogonales  $L \perp L^*$  dans lesquelles  $L$  parcourt l'ensemble  $\mathcal{R}$  de tous les réseaux de  $E$ . Soit  $\mathcal{G}$  le sous-groupe de  $\text{Gl}(E \times E)$  formé des couples  $(u, {}^t u^{-1})$ ,  $u \in \text{Gl}^+(E)$ . Les réseaux de la forme  $L \perp L^*$  constituent une unique orbite sous l'action de  $\mathcal{G}$ . On a  $\det(L \perp L^*) = 1$  et donc  $\gamma(L \perp L^*) = \min[N(L), N(L^*)]$ .

Supposons que l'on ait  $N(L) \neq N(L^*)$ , par exemple  $N(L) < N(L^*)$  pour fixer les idées, et considérons les homothéties de rapport  $\lambda$  croissant de 1 à  $(N(L)/N(L^*))^{1/2}$ . Ces homothéties font croître strictement l'invariant d'Hermite. Donc, les maxima locaux de  $\gamma(L \perp L^*)$  sont atteints sur le fermé d'équation  $N(L) = N(L^*)$ . Mais, sur cet ensemble, on a l'égalité  $\gamma'(L) = \gamma(L \perp L^*)$ . Les maxima locaux de l'invariant  $\gamma'$  sur les réseaux de  $E$  s'interprètent donc comme maxima locaux de l'invariant  $\gamma$  sur une sous-famille de réseaux de  $E \times E$ .

L'espace  $\mathcal{C}$  est le sous-ensemble de  $\text{End}^s(E) \times \text{End}^s(E)$  formé des couples  $(v, -v)$ . On vérifie facilement que les notions de dual-perfection et de dual-eutaxie ([B-M1], déf. 3.10, p. 24) coïncident avec celles de  $\mathcal{C}$ -perfection et de  $\mathcal{C}$ -eutaxie. La finitude de l'ensemble des classes de similitude de réseaux dual-extrêmes vient d'être démontrée par le premier auteur ([Ber]). La dual-perfection n'assure pas cette finitude (il existe des familles à 1 paramètre de réseaux dual-parfaits). On remédie à cet inconvénient en élargissant cette famille par homothétie, ce qui revient à remplacer  $\mathcal{C}$  par  $\mathcal{C} + \mathbf{R}\text{Id}$ .

On ne connaît pas d'adaptation de l'algorithme de Voronoï à cette situation.

**2.4. EXEMPLE. LES RÉSEAUX ISODUAUX.** Certains réseaux célèbres ( $A_2, D_4, E_8$ , réseaux de Coxeter-Todd, de Barnes-Wall, de Leech, diverses variantes du réseau de Quebbemann) sont semblables à leur dual, ce qui entraîne que les invariants  $\gamma$  et  $\gamma'$  prennent la même valeur sur ces réseaux. La normalisation  $N(L) = N(L^*)$  déjà utilisée dans l'exemple 2.3 permet de se restreindre au cas des réseaux isométriques à leur dual; ce sont les réseaux *isoduaux*, notion introduite par Conway et Sloane dans [C-S2]. Nous devons préciser cette définition: étant donné un élément  $\sigma \in \text{O}(E)$ , on dit qu'un réseau  $L$  est  $\sigma$ -isodual si l'on a  $L^* = \sigma(L)$ , cf. §§ 6-8. Alors, l'ensemble des réseaux  $\sigma$ -isoduaux (s'il n'est pas vide) constitue une orbite sous l'action d'un sous-groupe de Lie de  $\text{Gl}(E)$ .