L'Enseignement Mathématique, t. 41 (1995), p. 335-365

DENSITÉ DANS DES FAMILLES DE RÉSEAUX. APPLICATION AUX RÉSEAUX ISODUAUX

par Anne-Marie BERGÉ et Jacques MARTINET [1]

RÉSUMÉ. On s'intéresse dans cet article à la densité des empilements de sphères associés à des familles de réseaux qui se déduisent de l'un d'entre eux par l'action d'un sous-groupe fermé du groupe linéaire. La théorie des groupes de Lie permet de donner une caractérisation à la Voronoï des maxima locaux de densité, recouvrant de très nombreuses situations étudiées auparavant. On applique ensuite ces méthodes à l'étude des réseaux isoduaux récemment définis par Conway et Sloane.

ABSTRACT. We study in this paper the density of sphere packings arising from families of lattices which consist in the orbit of one of them under the action of a closed subgroup of the linear group. The theory of Lie groups yields a characterization "à la Voronoï" of the local maxima of density which contains many previously known examples. These methods are then applied to isodual lattices, recently defined by Conway and Sloane.

1. INTRODUCTION

Soit E un espace euclidien de dimension n, et soit $\mathscr{R}$ l'espace des réseaux de E, muni de la topologie pour laquelle un système fondamental de voisinages d'un réseau L s'obtient en associant à tout voisinage $\mathscr{V}$ de Id dans $\mathrm{Gl}(E)$ l'ensemble des réseaux $u(L)$, $u \in \mathscr{V}$. Pour $x \in E$, la *norme de* x est $N(x) = x.x$ (le carré de la norme euclidienne). A toute base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E, on associe sa *matrice de Gram* $\mathrm{Gram}(\mathscr{B}) = ((e_i . e_j))$. L'invariant d'Hermite d'un réseau L est $\gamma(L) = N(L) \det(L)^{-1/n}$, où $N(L) = \inf_{x \in L, x \neq 0} N(x)$ est la *norme* ou *minimum* de L et $\det(L)$ est le *déterminant de* L (déterminant de la matrice de Gram d'une base de L); $\gamma(L)$ ne dépend que de la classe de similitude de L, et $\gamma^{n/2}(L)$ est proportionnel à la densité de l'empilement de sphères associé à L; $\gamma_n = \sup_{L \in \mathscr{R}} \gamma(L)$ est la *constante d'Hermite pour la dimension* n.

---

[1] Membres du laboratoire U.M.R. 9936 du C.N.R.S.