

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 41 (1995)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** BIRAPPORT ET GROUPOÏDES  
**Autor:** Cathelineau, Jean-Louis  
**Kapitel:** 1.3 Preuve du théorème 2  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61827>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

L'associativité, dans le cas de trois morphismes où les objets sont en position générale, correspond à la configuration de Desargues de la figure 4.

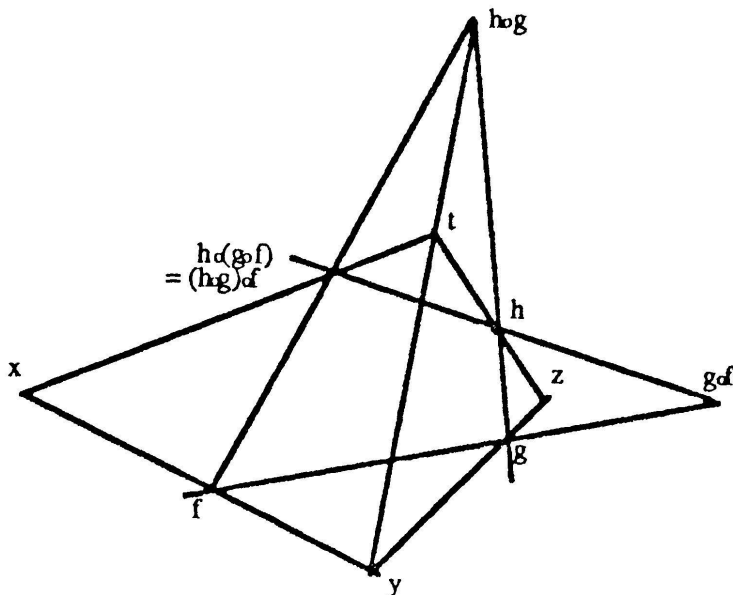


FIGURE 4

Rappelons le théorème de Desargues: si  $x, y, z$  et  $x', y', z'$  sont deux triangles de l'espace projectif  $\mathbf{P}^n(F)$ , où  $n \geq 2$ , tels que  $x$  et  $x'$ ,  $y$  et  $y'$ ,  $z$  et  $z'$  soient distincts, alors les points  $\langle x, y \rangle \cap \langle x', y' \rangle$ ,  $\langle y, z \rangle \cap \langle y', z' \rangle$  et  $\langle x, z \rangle \cap \langle x', z' \rangle$  sont alignés, si et seulement si les droites  $\langle x, x' \rangle$ ,  $\langle y, y' \rangle$  et  $\langle z, z' \rangle$  sont concourrantes.

### 1.3 PREUVE DU THÉORÈME 2

Dans toute la suite, on note  $p$  l'application quotient  $F^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{P}^n(F)$ .

On va construire un morphisme de groupoïdes  $\varphi: \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{V}_n$ , bijectif sur les ensembles d'objets. Pour prouver que  $\varphi$  est un isomorphisme, il suffira de vérifier que les morphismes induits  $\text{Aut}(x) \rightarrow \text{Aut}(\varphi(x))$  sont des isomorphismes pour tout  $x$  de  $\mathbf{P}^n(F)$ .

On note  $\varphi(x)$  la droite  $p^{-1}(x)$ . Si  $f = (x \xrightarrow{a} y)$  est un générateur de  $\mathcal{G}_n$ , on définit  $\varphi(f)$  comme l'isomorphisme linéaire:  $p^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(y)$ , dont le graphe est la droite conjuguée harmonique de  $p^{-1}(a)$  par rapport à  $p^{-1}(x)$  et  $p^{-1}(y)$ ; autrement dit,  $\varphi(f)$  est caractérisé par le fait que pour un vecteur non nul  $\vec{x} \in p^{-1}(x)$ ,  $\varphi(f)(\vec{x}) - \vec{x}$  appartient à  $p^{-1}(a)$ .

Pour voir que ces données induisent un morphisme  $\varphi: \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{V}_n$ , vérifions la comptabilité avec les relations  $\mathcal{R}$ . Soit  $f, g, h$  comme sur la figure 1, on a

$$\varphi(f)(\vec{x}) - \vec{x} \in p^{-1}(a) \quad \text{et} \quad \varphi(g)(\varphi(f)(\vec{x})) - \varphi(f)(\vec{x}) \in p^{-1}(b),$$

donc  $(\varphi(g) \circ \varphi(f))(\vec{x}) - \vec{x}$  appartient à l'intersection des deux plans

$$\langle p^{-1}(a), p^{-1}(b) \rangle \cap \langle p^{-1}(x), p^{-1}(z) \rangle = p^{-1}(c),$$

ce qui prouve que  $\varphi(g \circ f) = \varphi(g) \circ \varphi(f)$ .

Il reste à voir que les morphismes  $Aut(x) \rightarrow Aut(\varphi(x))$  induits par  $\varphi: \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{V}_n$  sont des isomorphismes. Cela se fait en plusieurs étapes.

Si  $x \neq y$ , l'inverse de  $f = (x \xrightarrow{a} y)$  est représenté par  $g = (y \xrightarrow{a} x)$ . En effet soit  $z$  en dehors de la droite  $\langle x, y \rangle$  et  $h = (x \xrightarrow{c} z)$ , il suffit de vérifier que  $h \circ (g \circ f) = h$ , ce qui apparaît sur la figure 5 qui montre une construction géométrique de  $(h \circ g) \circ f$ .

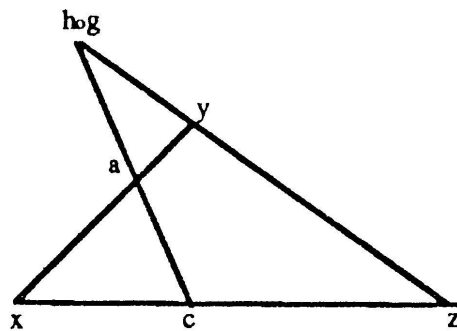


FIGURE 5

L'étape suivante consiste à prouver que tout automorphisme de  $x$  dans  $\mathcal{G}_n$  est représenté par une composée  $(y \xrightarrow{b} x) \circ (x \xrightarrow{a} y)$ , où  $x \neq y$ . Par définition de  $\mathcal{G}_n$ , tout morphisme de  $x$  est représenté par un «chemin»

$$x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} x_n.$$

Montrons que le composé d'un tel chemin est égal au composé de deux générateurs. Il suffit de considérer la situation où  $n = 3$ ; soit alors  $z$  en dehors des droites  $\langle x_0, x_1 \rangle$ ,  $\langle x_1, x_2 \rangle$  et  $\langle x_2, x_3 \rangle$  (voir aussi le lemme 1 du paragraphe 2.1 pour une situation plus délicate) et soit  $\omega$  sur la droite  $\langle x_1, z \rangle$ , distinct de  $x_1$  et  $z$ ; l'associativité de la composition et le fait que  $(z \xrightarrow{\omega} x_1) \circ (x_1 \xrightarrow{\omega} z) = id_{x_1}$  montrent que

$$(z \xrightarrow{\omega} x_1 \xrightarrow{a_1} x_2 \xrightarrow{a_2} x_3) \circ (x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{\omega} z) = (x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{a_1} x_2 \xrightarrow{a_2} x_3),$$

où l'on a identifié une suite de flèches à sa composée. D'autre part le choix de  $z$  et les relations de définition de  $\mathcal{G}_n$  montrent que  $(x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{\omega} z)$  et  $(z \xrightarrow{\omega} x_1 \xrightarrow{a_1} x_2 \xrightarrow{a_2} x_3)$  s'identifient à des générateurs de  $\mathcal{G}_n$ .

Démontrons maintenant que, si  $f \in Aut(x)$  est la composée  $h \circ g$  où  $g = x \xrightarrow{a} y$  et  $h = y \xrightarrow{b} x$ , alors  $\varphi(f) \in F^\times$  est le birapport  $r(x, y; a, b)$  des quatre points  $x, y, a, b$ . On a  $\varphi(f) = \varphi(h) \circ \varphi(g)$ ; soit  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{a}, \vec{b}$

au-dessus de  $x, y, a, b$  tels que  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{a}$  et  $\vec{b} = \lambda\vec{x} + \vec{y}$ , alors  $\varphi(f)(\vec{x}) = \varphi(h)(-\vec{y}) = \lambda\vec{x}$ , donc  $\varphi(f)$  est la multiplication par  $\lambda$ . D'autre part  $\lambda = r(x, y; a, b)$ ; en effet si on envoie  $x$  à l'infini et si on prend  $y$  pour origine de la droite affine ainsi obtenue, les coordonnées de  $a$  et  $b$  sont respectivement 1 et  $\lambda$ , mais  $r(\infty, 0; 1, \lambda) = \lambda$ .

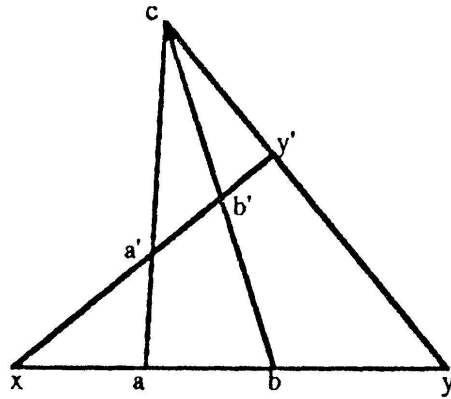


FIGURE 6

Pour achever la preuve, montrons que  $\varphi: \text{Aut}(x) \rightarrow \text{Aut}(\varphi(x))$  est injective. Notons  $(x, y; a, b)$  l'automorphisme de  $x: (y \xrightarrow{b} x) \circ (x \xrightarrow{a} y)$ , et prouvons que si  $r(x, y; a, b) = r(x, y'; a', b')$ , alors  $(x, y; a, b) = (x, y'; a', b')$ . On peut supposer que  $a \neq b$  et  $a' \neq b'$ . Si  $x, y, y'$  ne sont pas alignés, par l'invariance projective du birapport l'égalité  $r(x, y; a, b) = r(x, y'; a', b')$  entraîne que les droites  $\langle y, y' \rangle$ ,  $\langle a, a' \rangle$  et  $\langle b, b' \rangle$  sont concourantes. Mais alors en utilisant les relations de définition de  $\mathcal{G}_n$ , on a successivement

$$(y' \xrightarrow{a'} x) \circ (x \xrightarrow{b'} y') \circ (y \xrightarrow{b} x) = (y' \xrightarrow{a'} x) \circ (y \xrightarrow{c} y') = (y \xrightarrow{a} x),$$

ce qui montre que  $(x, y'; a', b')^{-1} \circ (x, y; a, b) = \text{id}_x$ . Si enfin,  $x, y, y'$  sont alignés, on applique deux fois ce qui précède en considérant  $y''$  en dehors de la droite  $\langle x, y \rangle$  et  $a'', b''$  sur la droite  $\langle x, y'' \rangle$  tels que  $r(x, y; a, b) = r(x, y''; a'', b'')$ .  $\square$

## 2. GROUPOÏDES ET GRASSMANNIENNES

### 2.1 PRÉSENTATION PAR GÉNÉRATEURS ET RELATIONS

On se propose de généraliser ce qui précède aux groupoïdes  $\mathcal{V}_{n,l}$  de la définition 1 et aux grassmanniennes.

**DÉFINITION 3.** Pour  $n \geq 3l - 1$ , on note  $\mathcal{V}'_{n,l}$  le groupoïde décrit par générateurs et relations comme suit.