

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 41 (1995)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: BIRAPPORT ET GROUPOÏDES
Autor: Cathelineau, Jean-Louis
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-61827>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 01.05.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BIRAPPORT ET GROUPOÏDES

par Jean-Louis CATHELINÉAU

Soit F un corps et n un entier supérieur ou égal à 2, on associe à l'espace projectif $\mathbf{P}^n(F)$ un groupoïde; ce groupoïde, défini par générateurs et relations de manière purement géométrique, fait apparaître très naturellement le groupe multiplicatif du corps et le classique birapport. Une structure analogue existe plus généralement pour les grassmanniennes. Ces considérations amènent à une présentation géométrique élémentaire de l'homologie du groupe linéaire en terme de grassmanniennes, en analogie avec la situation topologique classique, et illustre aussi l'intérêt (voir entre autres [3, 10]) de considérer pour un groupe discret G , des catégories, autres que la classique catégorie à un objet, dont le réalisé est aussi un espace d'Eilenberg-MacLane $K(G, 1)$. Ce qui suit espère montrer la dimension géométrique de ce point de vue, dans la ligne des idées de F. Klein. On discute aussi quelques extensions naturelles du birapport pour certaines configurations de points ou de sous-espaces de l'espace projectif.

Ces résultats m'ont été inspirés par quelques aspects d'un travail de Goncharov sur la conjecture de Zagier [9, 8, 4].

1. GROUPOÏDES ET ESPACES PROJECTIFS

1.1 PRÉSENTATION D'UN GROUPOÏDE PAR GÉNÉRATEURS ET RELATIONS

Rappelons qu'une *petite catégorie* est une catégorie dont les objets forment un ensemble, et qu'un *groupoïde* est une petite catégorie dont tous les morphismes sont des isomorphismes. Un groupoïde est dit *connexe* si, entre deux de ses objets, il existe toujours un morphisme. Dans la suite tous les groupoïdes sont supposés connexes. Dans un groupoïde, les automorphismes d'un objet forment un groupe et tous ces groupes d'automorphismes sont isomorphes. Un groupe s'identifie à un groupoïde avec un seul objet et tout groupoïde est équivalent, au sens des catégories, à un tel groupoïde.

Mais il faut se garder de croire que la théorie des groupoïdes se réduit à celle des groupes. Pour un aperçu général sur la théorie des groupoïdes et leurs applications on renvoie à l'exposé de R. Brown [3].

Comme la notion de groupoïde généralise celle de groupe, il n'est pas surprenant que l'on puisse présenter un groupoïde par générateurs et relations.

Pour cela considérons les données suivantes

- i) un ensemble d'objets X ,
- ii) un ensemble \mathcal{F} de *générateurs* donné par des «flèches» $f : x \rightarrow y$ entre les éléments de X ,
- iii) un ensemble \mathcal{R} de *relations* entre les éléments de \mathcal{F} du type

$$f_r^{\varepsilon_r} \circ f_{r-1}^{\varepsilon_{r-1}} \circ \cdots \circ f_1^{\varepsilon_1} = id_x (\varepsilon_j = \pm 1),$$

où l'extrémité de la flèche f_i coïncide avec l'origine de f_{i+1} .

PROPOSITION 1. *Il existe, à isomorphisme près, un et un seul groupoïde \mathcal{G} , d'ensemble d'objets X , muni d'une application $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \text{Mor } \mathcal{G}$ compatible avec les objets, satisfaisant de plus à la propriété universelle suivante:*

«Pour tout groupoïde \mathcal{H} , pour toute application $h : X \rightarrow \text{Obj } \mathcal{H}$, et pour toute application $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \text{Mor } \mathcal{H}$ compatible avec h vérifiant: $\psi(f_r)^{\varepsilon_r} \circ \psi(f_{r-1})^{\varepsilon_{r-1}} \circ \cdots \circ \psi(f_1)^{\varepsilon_1} = id_{h(x)}$ pour chaque relation de \mathcal{R} , il existe un unique morphisme de groupoïdes

$$\tilde{\psi} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$$

tel que

$$\tilde{\psi} \circ \phi = \psi . \gg$$

Esquissons la preuve: on commence par construire le groupoïde «libre» \mathcal{L} engendré par les données X et \mathcal{F} . Pour ce faire, on introduit le graphe orienté Γ dont les *sommets* sont les éléments de X et dont les *arêtes* sont de l'un des types $x \xrightarrow{f} y$ ou $y \xrightarrow{\hat{f}} x$, pour $f : x \rightarrow y$ élément de \mathcal{F} (on suppose que ce graphe est connexe). Le groupoïde \mathcal{L} a alors pour objets les éléments de X et, pour morphismes, les classes d'équivalences de *chemins orientés* sur le graphe Γ , relativement à la relation d'équivalence engendrée par les relations élémentaires suivantes: deux chemins sont élémentairement équivalents si l'on passe de l'un à l'autre en remplaçant une séquence

$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\hat{f}} x$ (resp. $y \xrightarrow{\hat{f}} x \xrightarrow{f} y$) par x (resp. y). La composition dans \mathcal{L} s'obtient en composant les chemins; l'inverse de la classe de $x \xrightarrow{f} y$ est alors la classe de $y \xrightarrow{\hat{f}} x$.

Le groupoïde \mathcal{G} se déduit de \mathcal{L} en passant au quotient par les relations \mathcal{R} . Plus précisément, les relations \mathcal{R} engendrent une famille de groupes $(G_x)_{x \in X}$, où G_x est un sous-groupe de $\text{Aut}_{\mathcal{L}}(x)$, satisfaisant à la condition

(*) pour tout morphisme $f : x \rightarrow y$ de \mathcal{L} , la conjugaison: $\text{Aut}_x \rightarrow \text{Aut}_y$, $g \mapsto f \circ g \circ f^{-1}$, induit une bijection de G_x sur G_y ;

on obtient alors \mathcal{G} à partir de \mathcal{L} en passant au quotient par la relation d'équivalence suivante sur les morphismes de \mathcal{L}

(**) pour $f, g \in \text{Mor}(x, y)$, $f \sim g$ si $g^{-1} \circ f \in G_x$. \square

DÉFINITION 1. Pour F un corps et $l \geq 1$, $\mathcal{V}_{n,l}$ désigne le groupoïde dont les objets sont les sous-espaces de dimension l de F^{n+1} et les morphismes, les isomorphismes linéaires entre ces espaces. Pour $l = 1$, on note plus simplement ce groupoïde \mathcal{V}_n .

Dans les paragraphes 1.2 et 2.1, on donne pour $n \geq 3l - 1$ une présentation par générateurs et relations du groupoïde $\mathcal{V}_{n,l}$, en termes de géométrie projective.

1.2 LE GROUPOÏDE DES POINTS DE $\mathbf{P}^n(F)$

Dans la suite, F est un corps commutatif quelconque, en particulier on n'exclut pas le corps à deux éléments.

DÉFINITION 2. Pour $n \geq 2$, on considère le groupoïde \mathcal{G}_n défini par générateurs et relations comme suit:

- i) Les objets de \mathcal{G}_n sont les points de $\mathbf{P}^n(F)$.
- ii) L'ensemble des générateurs \mathcal{F} est constitué des flèches $f = (x \xrightarrow{a} y)$, où x et y sont des points distincts de $\mathbf{P}^n(F)$ et a est un point de la droite $\langle x, y \rangle$ distinct de x et y .
- iii) Les relations \mathcal{R} sont du type $h = g \circ f$ où $f = (x \xrightarrow{a} y)$, $g = (y \xrightarrow{b} z)$ et $h = (x \xrightarrow{c} z)$ sont comme sur la figure 1, c'est-à-dire que x, y et z sont en position générale et c est l'intersection des droites $\langle x, z \rangle$ et $\langle a, b \rangle$.

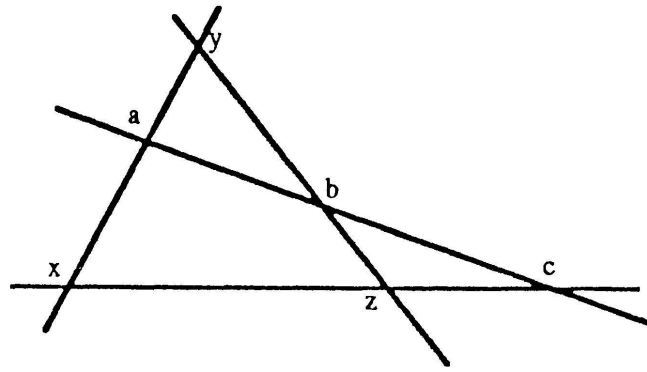


FIGURE 1

Un triangle comme sur la figure 1 est une cubique dégénérée; noter alors l'analogie avec la définition de la loi de groupe sur une cubique non singulière. On peut dire aussi que les relations \mathcal{R} sont données par les configurations de Menelaüs: rappelons que le théorème de Menelaüs exprime l'alignement des points a, b, c , sur la figure 1, par la condition affine $\frac{ax}{ay} \frac{by}{bz} \frac{cz}{cx} = 1$.

On rappelle que si F a au moins trois éléments et si x, y, a, b sont quatre points distincts de $\mathbf{P}^n(F) = F \cup \{\infty\}$, il existe un unique élément $r(x, y; a, b) \in F^\times$ et une unique homographie $f \in PGL(2, F)$ tels que

$$(f(x), f(y), f(a), f(b)) = (\infty, 0, 1, r(x, y; a, b)) .$$

L'élément $r(x, y; a, b) = \frac{x-a}{x-b} \frac{y-b}{y-a}$ est le birapport des quatre points x, y, a, b ; pour les généralités sur le birapport, voir par exemple [1].

Dans la suite on convient que $r(x, y; a, b) = 1$, si $a = b$.

Noter que le groupe projectif $PGL(n+1, F)$ opère naturellement dans \mathcal{G}_n par automorphismes de groupoïdes.

THÉORÈME 1. *Le groupoïde \mathcal{G}_n vérifie les propriétés suivantes*

- 1) *Pour $x \neq y$, si $f = (x \xrightarrow{a} y)$ alors $f^{-1} = (y \xrightarrow{a} x)$.*
- 2) *Pour $x \neq y$, $Mor(x, y)$ coïncide avec l'ensemble des générateurs de source x et de but y .*
- 3) *Pour tout $x \in \mathbf{P}^n(F)$, il existe un unique isomorphisme, $t_x: Aut_{\mathcal{G}_n}(x) \rightarrow F^\times$, tel que pour $f = (x \xrightarrow{a} y)$ et $g = (y \xrightarrow{a} x)$, $t_x(g \circ f) = r(x, y; a, b)$. De plus ces isomorphismes sont compatibles avec l'action de $PGL(n+1, F)$ dans \mathcal{G}_n .*

Ce théorème est en fait un corollaire du suivant.

THÉORÈME 2. *Il existe un isomorphisme de groupoïdes $\varphi: \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{V}_n$ tel que, pour $f = (x \xrightarrow{a} y)$ et $g = (y \xrightarrow{a} x)$, on a $\varphi(g \circ f) = r(x, y; a, b)$.*

Avant de montrer ce dernier résultat, donnons deux illustrations géométriques du théorème 1.

Si $f = (x \xrightarrow{a} y)$ et $g = (y \xrightarrow{a} z)$ sont tels que x, y, z sont *distincts et alignés*, alors $g \circ f = (x \xrightarrow{c} z)$, où c est le point de $\langle x, y \rangle$ obtenu par la construction géométrique de la figure 2.

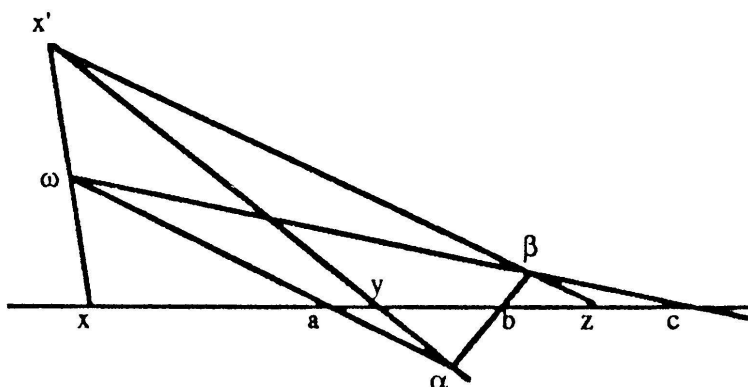


FIGURE 2

Détaillons cette construction: on choisit un point x' en dehors de la droite $\langle x, y \rangle$ et un point ω sur la droite $\langle x, x' \rangle$ distinct de x et x' . Le point α correspond alors à la composée $f \circ (x' \xrightarrow{\omega} x)$, le point β à $g \circ (f \circ (x' \xrightarrow{\omega} x))$ et le point c à

$$(g \circ (f \circ (x' \xrightarrow{\omega} x))) \circ (x \xrightarrow{\omega} x') .$$

L'associativité du groupoïde \mathcal{G}_n et le point 1) du théorème 1 montrent que cette dernière composition n'est autre que $g \circ f$. Le lecteur pourra considérer le cas particulier où F est le corps à deux éléments et constater que si x, y, z sont les trois points d'une droite de $\mathbf{P}^2(F)$, on a la relation $(y \xrightarrow{x} z) \circ (x \xrightarrow{z} y) = (x \xrightarrow{y} z)$. Rappelons que le plan projectif du corps à deux éléments est constitué de 7 points et 7 droites disposés comme sur la figure 3

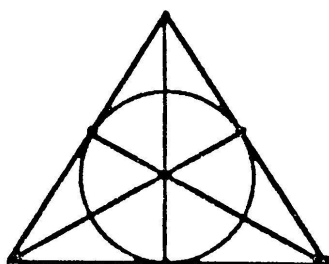


FIGURE 3

L'associativité, dans le cas de trois morphismes où les objets sont en position générale, correspond à la configuration de Desargues de la figure 4.

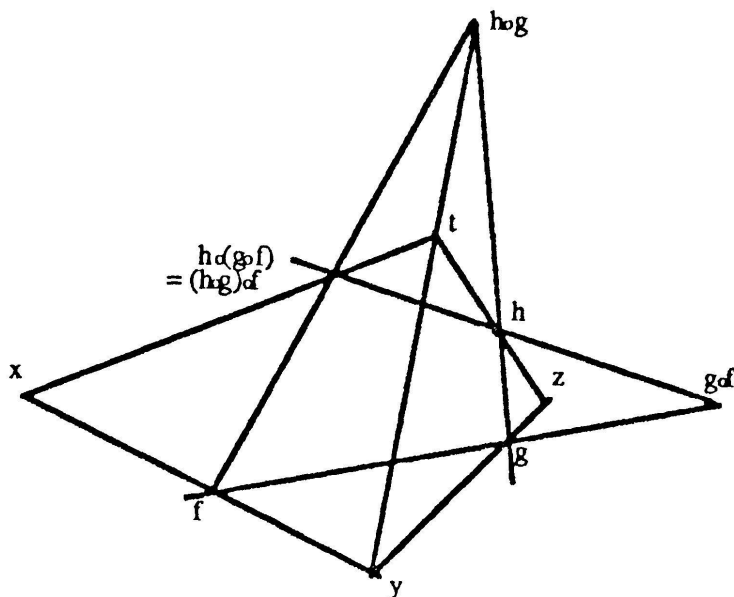


FIGURE 4

Rappelons le théorème de Desargues: si x, y, z et x', y', z' sont deux triangles de l'espace projectif $\mathbf{P}^n(F)$, où $n \geq 2$, tels que x et x' , y et y' , z et z' soient distincts, alors les points $\langle x, y \rangle \cap \langle x', y' \rangle$, $\langle y, z \rangle \cap \langle y', z' \rangle$ et $\langle x, z \rangle \cap \langle x', z' \rangle$ sont alignés, si et seulement si les droites $\langle x, x' \rangle$, $\langle y, y' \rangle$ et $\langle z, z' \rangle$ sont concourrantes.

1.3 PREUVE DU THÉORÈME 2

Dans toute la suite, on note p l'application quotient $F^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{P}^n(F)$.

On va construire un morphisme de groupoïdes $\varphi: \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{V}_n$, bijectif sur les ensembles d'objets. Pour prouver que φ est un isomorphisme, il suffira de vérifier que les morphismes induits $Aut(x) \rightarrow Aut(\varphi(x))$ sont des isomorphismes pour tout x de $\mathbf{P}^n(F)$.

On note $\varphi(x)$ la droite $p^{-1}(x)$. Si $f = (x \xrightarrow{a} y)$ est un générateur de \mathcal{G}_n , on définit $\varphi(f)$ comme l'isomorphisme linéaire: $p^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(y)$, dont le graphe est la droite conjuguée harmonique de $p^{-1}(a)$ par rapport à $p^{-1}(x)$ et $p^{-1}(y)$; autrement dit, $\varphi(f)$ est caractérisé par le fait que pour un vecteur non nul $\vec{x} \in p^{-1}(x)$, $\varphi(f)(\vec{x}) - \vec{x}$ appartient à $p^{-1}(a)$.

Pour voir que ces données induisent un morphisme $\varphi: \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{V}_n$, vérifions la comptabilité avec les relations \mathcal{R} . Soit f, g, h comme sur la figure 1, on a

$$\varphi(f)(\vec{x}) - \vec{x} \in p^{-1}(a) \quad \text{et} \quad \varphi(g)(\varphi(f)(\vec{x})) - \varphi(f)(\vec{x}) \in p^{-1}(b),$$

donc $(\varphi(g) \circ \varphi(f))(\vec{x}) - \vec{x}$ appartient à l'intersection des deux plans

$$\langle p^{-1}(a), p^{-1}(b) \rangle \cap \langle p^{-1}(x), p^{-1}(z) \rangle = p^{-1}(c),$$

ce qui prouve que $\varphi(g \circ f) = \varphi(g) \circ \varphi(f)$.

Il reste à voir que les morphismes $Aut(x) \rightarrow Aut(\varphi(x))$ induits par $\varphi: \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{V}_n$ sont des isomorphismes. Cela se fait en plusieurs étapes.

Si $x \neq y$, l'inverse de $f = (x \xrightarrow{a} y)$ est représenté par $g = (y \xrightarrow{a} x)$. En effet soit z en dehors de la droite $\langle x, y \rangle$ et $h = (x \xrightarrow{c} z)$, il suffit de vérifier que $h \circ (g \circ f) = h$, ce qui apparaît sur la figure 5 qui montre une construction géométrique de $(h \circ g) \circ f$.

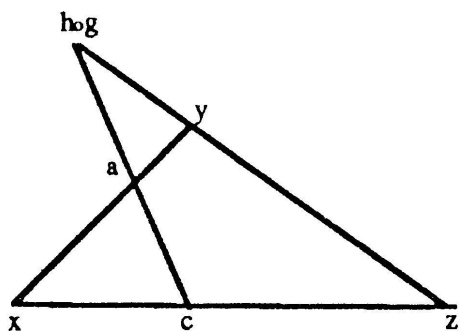


FIGURE 5

L'étape suivante consiste à prouver que tout automorphisme de x dans \mathcal{G}_n est représenté par une composée $(y \xrightarrow{b} x) \circ (x \xrightarrow{a} y)$, où $x \neq y$. Par définition de \mathcal{G}_n , tout morphisme de x est représenté par un «chemin»

$$x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} x_n.$$

Montrons que le composé d'un tel chemin est égal au composé de deux générateurs. Il suffit de considérer la situation où $n = 3$; soit alors z en dehors des droites $\langle x_0, x_1 \rangle$, $\langle x_1, x_2 \rangle$ et $\langle x_2, x_3 \rangle$ (voir aussi le lemme 1 du paragraphe 2.1 pour une situation plus délicate) et soit ω sur la droite $\langle x_1, z \rangle$, distinct de x_1 et z ; l'associativité de la composition et le fait que $(z \xrightarrow{\omega} x_1) \circ (x_1 \xrightarrow{\omega} z) = id_{x_1}$ montrent que

$$(z \xrightarrow{\omega} x_1 \xrightarrow{a_1} x_2 \xrightarrow{a_2} x_3) \circ (x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{\omega} z) = (x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{a_1} x_2 \xrightarrow{a_2} x_3),$$

où l'on a identifié une suite de flèches à sa composée. D'autre part le choix de z et les relations de définition de \mathcal{G}_n montrent que $(x_0 \xrightarrow{a_0} x_1 \xrightarrow{\omega} z)$ et $(z \xrightarrow{\omega} x_1 \xrightarrow{a_1} x_2 \xrightarrow{a_2} x_3)$ s'identifient à des générateurs de \mathcal{G}_n .

Démontrons maintenant que, si $f \in Aut(x)$ est la composée $h \circ g$ où $g = x \xrightarrow{a} y$ et $h = y \xrightarrow{b} x$, alors $\varphi(f) \in F^\times$ est le birapport $r(x, y; a, b)$ des quatre points x, y, a, b . On a $\varphi(f) = \varphi(h) \circ \varphi(g)$; soit $\vec{x}, \vec{y}, \vec{a}, \vec{b}$

au-dessus de x, y, a, b tels que $\vec{x} + \vec{y} = \vec{a}$ et $\vec{b} = \lambda\vec{x} + \vec{y}$, alors $\varphi(f)(\vec{x}) = \varphi(h)(-\vec{y}) = \lambda\vec{x}$, donc $\varphi(f)$ est la multiplication par λ . D'autre part $\lambda = r(x, y; a, b)$; en effet si on envoie x à l'infini et si on prend y pour origine de la droite affine ainsi obtenue, les coordonnées de a et b sont respectivement 1 et λ , mais $r(\infty, 0; 1, \lambda) = \lambda$.

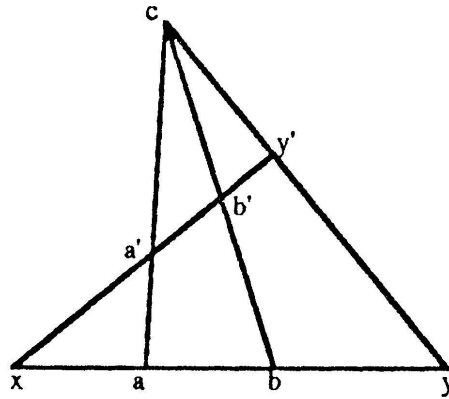


FIGURE 6

Pour achever la preuve, montrons que $\varphi: \text{Aut}(x) \rightarrow \text{Aut}(\varphi(x))$ est injective. Notons $(x, y; a, b)$ l'automorphisme de $x: (y \xrightarrow{b} x) \circ (x \xrightarrow{a} y)$, et prouvons que si $r(x, y; a, b) = r(x, y'; a', b')$, alors $(x, y; a, b) = (x, y'; a', b')$. On peut supposer que $a \neq b$ et $a' \neq b'$. Si x, y, y' ne sont pas alignés, par l'invariance projective du birapport l'égalité $r(x, y; a, b) = r(x, y'; a', b')$ entraîne que les droites $\langle y, y' \rangle$, $\langle a, a' \rangle$ et $\langle b, b' \rangle$ sont concourantes. Mais alors en utilisant les relations de définition de \mathcal{G}_n , on a successivement

$$(y' \xrightarrow{a'} x) \circ (x \xrightarrow{b'} y') \circ (y \xrightarrow{b} x) = (y' \xrightarrow{a'} x) \circ (y \xrightarrow{c} y') = (y \xrightarrow{a} x),$$

ce qui montre que $(x, y'; a', b')^{-1} \circ (x, y; a, b) = id_x$. Si enfin, x, y, y' sont alignés, on applique deux fois ce qui précède en considérant y'' en dehors de la droite $\langle x, y \rangle$ et a'', b'' sur la droite $\langle x, y'' \rangle$ tels que $r(x, y; a, b) = r(x, y''; a'', b'')$. \square

2. GROUPOÏDES ET GRASSMANNIENNES

2.1 PRÉSENTATION PAR GÉNÉRATEURS ET RELATIONS

On se propose de généraliser ce qui précède aux groupoïdes $\mathcal{V}_{n,l}$ de la définition 1 et aux grassmanniennes.

DÉFINITION 3. Pour $n \geq 3l - 1$, on note $\mathcal{V}'_{n,l}$ le groupoïde décrit par générateurs et relations comme suit.

- i) Les objets de $\mathcal{V}'_{n,l}$ sont les mêmes que ceux de $\mathcal{V}_{n,l}$.
- ii) Les générateurs sont les isomorphismes linéaires $E_1 \xrightarrow{u} E_2$ où E_1 et E_2 sont transverses.
- iii) Si \star désigne la composition des morphismes dans $\mathcal{V}'_{n,l}$, les relations sont du type: $v \star u = v \circ u$, chaque fois que $E_1 \xrightarrow{u} E_2$ et $E_2 \xrightarrow{v} E_3$ sont deux isomorphismes tels que E_1, E_2 et E_3 soient en somme directe.

DÉFINITION 4. Pour $n \geq 3l - 1$, on introduit un troisième groupoïde $\mathcal{G}_{n,l}$, défini en terme de la géométrie de $\mathbf{P}^n(F)$ comme suit.

- i) Les objets de $\mathcal{G}_{n,l}$ sont les sous-espaces projectifs de dimension $l - 1$ de l'espace projectif $\mathbf{P}^n(F)$.
- ii) Les générateurs sont de la forme: $f = (X \xrightarrow{A} Y)$ où X, Y, A sont trois sous-espaces de dimension $l - 1$ de $\mathbf{P}^n(F)$, 2 à 2 disjoints et $A \subset \langle X, Y \rangle \cong \mathbf{P}^{2l-1}(F)$; ici $\langle X, Y \rangle$ désigne le sous-espace projectif engendré par $X \cup Y$.
- iii) Les relations sont du type $g \circ f = h$, où $f = (X \xrightarrow{A} Y)$, $g = (Y \xrightarrow{B} Z)$ et $h = (X \xrightarrow{C} Z)$ sont tels que $\dim \langle X, Y, Z \rangle = 3l - 1$ et où $C = \langle X, Z \rangle \cap \langle A, B \rangle$.

THÉORÈME 3. Pour $n \geq 3l - 1$, les groupoïdes $\mathcal{V}_{n,l}$ et $\mathcal{G}_{n,l}$ sont isomorphes.

Cela résulte de deux propositions.

PROPOSITION 2. Quelque soit $n \geq 3l - 1$, le morphisme naturel $\mathcal{V}'_{n,l} \rightarrow \mathcal{V}_{n,l}$ est un isomorphisme.

PROPOSITION 3. Pour $n \geq 3l - 1$, les groupoïdes $\mathcal{V}'_{n,l}$ et $\mathcal{G}_{n,l}$ sont naturellement isomorphes.

Preuve de la proposition 2. Le morphisme naturel $\mathcal{V}'_{n,l} \rightarrow \mathcal{V}_{n,l}$ est bijectif sur les objets. Le point crucial est de voir qu'il est bijectif sur les automorphismes. Noter que $\mathcal{V}'_{n,l}$ est connexe car, étant donnés deux sous-espaces E_1 et E_2 de dimension l de F^{n+1} , il en existe un troisième qui leur est transverse. Si $E_1 \xrightarrow{u} E_2$ est un générateur de $\mathcal{V}'_{n,l}$, l'inverse de u dans $\mathcal{V}'_{n,l}$ coïncide avec l'inverse u^{-1} de u dans $\mathcal{V}_{n,l}$. En effet soit $E_2 \xrightarrow{v} E_3$ avec E_1, E_2 et E_3 en position générale, on a successivement

$$(v \star u) \star u^{-1} = (v \circ u) \star u^{-1} = (v \circ u) \circ u^{-1} = v.$$

Tout morphisme $E \rightarrow E'$ dans $\mathcal{V}'_{n,l}$ s'écrit comme une composition $u_r \star u_{r-1} \star \cdots \star u_0$

$$E = E_0 \xrightarrow{u_1} E_1 \rightarrow \cdots \rightarrow E_{r-1} \xrightarrow{u_r} E_r = E',$$

où E_i et E_{i+1} sont transverses. Un tel morphisme a un représentant de la forme

$$E \xrightarrow{u} H \xrightarrow{v} E',$$

où H est transverse à E et E' .

Il suffit de le prouver pour $r = 3$. Dans ce cas particulier, on a l'assertion suivante quelque soit le corps F :

LEMME 1. *Dans la situation ci-dessus où $r = 3$, il existe H de dimension l tel que H, E_0, E_1, H, E_1, E_2 et H, E_2, E_3 soient respectivement en somme directe.*

Reportons la preuve du lemme et soit $w: E_2 \rightarrow H$, si on pose $v = u_3 \circ w^{-1}$ et $u = w \circ u_2 \circ u_1$, on a les relations

$$\begin{aligned} u_3 \star u_2 \star u_1 &= u_3 \star (w^{-1} \star w) \star u_2 \star u_1 \\ &= (u_3 \star w^{-1}) \star ((w \star u_2) \star u_1) = (u_3 \circ w^{-1}) \star (w \circ u_2 \circ u_1) = v \star u, \end{aligned}$$

d'où la réduction.

Soit maintenant un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & H & \\ & \nearrow u & \searrow v \\ E & & E \\ & \searrow u' & \nearrow v' \\ & H' & \end{array}$$

où u, u', v et v' sont des générateurs de $\mathcal{V}'_{n,l}$. Il reste à montrer que, si un tel diagramme commute dans $\mathcal{V}_{n,l}$, alors il commute aussi dans $\mathcal{V}'_{n,l}$. Si E, H et H' sont en somme directe, on a successivement

$$u \star u'^{-1} = (u \circ u'^{-1}) = (v'^{-1} \circ v) = v'^{-1} \star v,$$

d'où $v' \star u' = v \star u$. Sinon on considère $E \xrightarrow{u''} H'' \xrightarrow{v''} E$ de telle sorte que $v'' \circ u'' = v \circ u$ avec E, H, H'' et E, H', H'' en somme directe, et on applique deux fois ce qui précède. \square

Preuve du lemme 1. Soient $V_1 = E_0 \oplus E_1$, $V_2 = E_1 \oplus E_2$ et $V_3 = E_2 \oplus E_3$, on veut trouver un sous-espace de dimension l de F^{n+1} transverse aux V_i . En considérant un sous-espace E de F^{n+1} de dimension $3l$ contenant V_2 , on se ramène facilement au cas où $\dim(V_1 + V_2 + V_3) \leq 3l$. On peut alors écrire

$$V_1 + V_2 + V_3 = V_2 \oplus S \oplus T_1 \oplus T_3,$$

où $S \subset V_1 \cap V_3$, $T_1 \subset V_1$, $T_3 \subset V_3$ et T_1 (resp. T_3) est transverse à V_3 (resp. V_1). Soit $\alpha = \dim S$, $\beta_1 = \dim T_1$ et $\beta_3 = \dim T_3$, il suffit alors de trouver un sous-espace H' de $V_1 + V_2 + V_3$ de dimension $\alpha + \beta_1 + \beta_3$ transverse à chacun des V_i .

On a les inégalités $\alpha + \beta_1 \leq l$ et $\alpha + \beta_2 \leq l$; par suite, il existe des sous-espaces, en somme directe, T'_1 et S' de E_2 (resp. T'_3 et S'' de E_1) vérifiant les conditions: $\dim T'_1 = \beta_1$, $\dim T'_3 = \beta_3$, $\dim S' = \dim S'' = \alpha$, $(T'_1 \oplus S') \cap V_1 = \{0\}$ et $(T'_3 \oplus S'') \cap V_3 = \{0\}$.

Soit alors \tilde{S} un sous-espace de $S \oplus S' \oplus S''$, de dimension α , transverse à $S \oplus S'$, $S \oplus S''$ et $S' \oplus S''$. Soit de même \tilde{T}_1 (resp. \tilde{T}_3) un sous-espace de $T_1 \oplus T'_1$ (resp. $T_3 \oplus T'_3$) de dimension β_1 (resp. β_3) transverse à T_1 et T'_1 (resp. T_3 et T'_3). La somme directe $\tilde{S} \oplus \tilde{T}_1 \oplus \tilde{T}_3$ est le sous-espace H' cherché. \square

Preuve de la proposition 3. Soit $p: F^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{P}^n(F)$ la projection, on considère la bijection $\psi: \text{Obj}(\mathcal{G}'_{n,l}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{G}_{n,l})$ donnée par $\psi(E) = p(E \setminus \{0\})$. On va prolonger ψ en une bijection notée aussi ψ de l'ensemble des générateurs de $\mathcal{V}'_{n,l}$ sur l'ensemble des générateurs de $\mathcal{G}_{n,l}$ respectant les relations.

Si $u: E \rightarrow H$ est un générateur de $\mathcal{V}'_{n,l}$, le sous-espace $J = \{u(x) - x: x \in E\}$ de F^{n+1} est de dimension l car $E \cap H = \{0\}$. Posons alors

$$\psi(E \xrightarrow{u} H) = X \xrightarrow{A} Y,$$

où $X = p(E \setminus \{0\})$, $Y = p(H \setminus \{0\})$ et $A = p(J \setminus \{0\})$. Cette application est bijective; on a en effet

$$\psi^{-1}(X \xrightarrow{A} Y) = p^{-1}(X) \xrightarrow{u} p^{-1}(Y),$$

où pour $x \in p^{-1}(X)$, $u(x)$ est l'unique élément y de $p^{-1}(Y)$ tel que $p(y - x) \in A$: noter qu'il existe une unique droite projective Δ passant par $p(x)$ et rencontrant A et Y . Lorsque $l = 2$, penser à la surface réglée engendrée par trois droites en position générale.

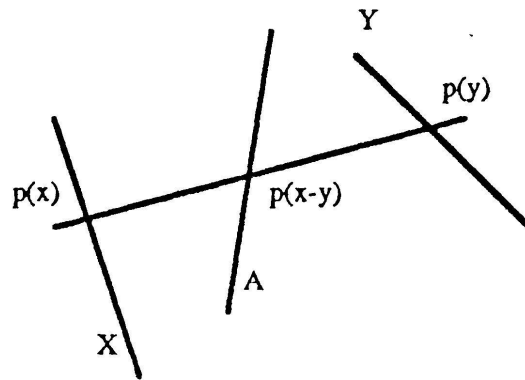


FIGURE 7

Il reste à voir que ψ respecte les relations. Soit E_1, E_2, E_3 en somme directe et soit de plus $u_1: E_1 \rightarrow E_2$ et $u_2: E_2 \rightarrow E_3$; posons pour $i = 1, 2$

$$J_i = \{u_i(x) - x : x \in E_i\}.$$

Comme

$$(u_2 \circ u_1)(x) - x = (u_2(u_1(x)) - u_1(x)) + (u_1(x) - x),$$

on a

$$\{(u_2 \circ u_1)(x) - x : x \in E_1\} \subset (J_1 \oplus J_2) \cap (E_1 \oplus E_2).$$

L'égalité résulte de l'égalité des dimensions. \square

2.2 INVARIANTS PROJECTIFS DE QUADRUPLETS DE SOUS-ESPACES DE DIMENSION $l - 1$ DE $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$

On peut formuler dans le cadre de ce qui précède des invariants projectifs de quatre sous-espaces de dimension $l - 1$ de $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$ qui généralisent le birapport de quatre points de $\mathbf{P}^1(F)$.

Pour cela, revenons au groupoïde $\mathcal{V}_{n,l}$. On considère la réunion disjointe des groupes d'automorphismes de $\mathcal{V}_{n,l}$

$$\mathbf{A} := \coprod_{\substack{\dim E = l \\ E \subset F^{n+1}}} GL(E).$$

Le groupe linéaire $GL(n+1, F)$ opère par conjugaison dans \mathbf{A} . Pour $f \in \mathbf{A}$, soit

$$X^l - a_1(f)X^{l-1} + \cdots + (-1)^l a_l(f),$$

son polynôme caractéristique. Les a_i sont des fonctions invariantes par l'action de $GL(n + 1, F)$ sur \mathbf{A} . En composant ces fonctions avec l'isomorphisme de groupoïdes du théorème 3, on obtient pour $l \geq 1$ et $n \geq 3l - 1$, des fonctions c_i sur

$$\coprod_{X \in \text{Obj}(\mathcal{G}_{n,l})} \text{Aut}(X)$$

qui sont invariantes par l'action du groupe projectif $PGL(n + 1, F)$ sur $\mathcal{G}_{n,l}$.

On en déduit des invariants projectifs qui sont des analogues du birapport. Par exemple, si X, Y, A, B sont quatre sous-espaces projectifs de dimension $l - 1$ de $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$, tels que X, Y, A et X, Y, B soient respectivement en position générale, alors les éléments de F donnés par les $c_i((Y \xrightarrow{B} X) \circ (X \xrightarrow{A} Y))$ sont des invariants projectifs de la configuration constituée par ces quatre sous-espaces.

On sait que «en général» (au sens de la géométrie énumérative et pour un corps algébriquement clos, voir par exemple [6] p. 272 et [11] p. 206), si X, Y, A, B sont quatre sous-espaces de dimension $l - 1$ de $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$ deux à deux disjoints, il existe exactement l droites $(\Delta_j)_{j=1, \dots, l}$ de $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$ qui rencontrent à la fois X, Y, A et B .

Supposons que X, Y, A, B soit une telle configuration; notons x_j, y_j, a_j, b_j les points d'intersection respectifs de Δ_j avec X, Y, A et B , et soit α_j le birapport $r(x_j, y_j; a_j, b_j)$. Alors, si le corps F a au moins $l + 1$ éléments, les α_j sont deux à deux distincts et coïncident avec les valeurs propres de $(Y \xrightarrow{B} X) \circ (X \xrightarrow{A} Y)$, d'où les relations

$$c_i((Y \xrightarrow{B} X) \circ (X \xrightarrow{A} Y)) = \sigma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_l),$$

où σ_i désigne la i -ième fonction symétrique élémentaire de l variables.

En effet notons E le sous-espace de dimension l de F^{2l} tel que $p(E \setminus \{0\}) = X$ dans la projection de $F^{2l} \setminus \{0\}$ sur $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$; soit D_j la droite de E au-dessus de x_j ; soit de plus f l'élément de $GL(E)$ correspondant à $(Y \xrightarrow{B} X) \circ (X \xrightarrow{A} Y)$. En reprenant des arguments contenus dans les preuves des théorèmes 2 et 3, on montre qu'une droite vectorielle D de E est une droite propre de f si et seulement si il existe une droite (unique) Δ de $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$ passant par le point $x := p(D \setminus \{0\})$ et rencontrant Y, A , et B ; de plus la valeur propre correspondante est le birapport $r(x, y; a, b)$, où y, a, b sont les points d'intersection de Δ avec Y, A , et B . On voit donc que les α_j sont valeurs propres de f ; de plus ces valeurs propres sont deux à deux distinctes, sinon f admettrait un sous-espace propre de dimension au moins égale à 2, ce qui entraînerait l'existence d'au moins $\text{card}(\mathbf{P}^1(F))$

$= \text{card}(F) + 1$ droites distinctes de $\mathbf{P}^{2l-1}(F)$ rencontrant X, Y, A , et B , mais $\text{card}(\mathbf{P}^1(F)) > l$, par hypothèse sur F . Il en résulte que f est diagonalisable et que les x_j sont en position générale dans X , car les D_j sont en somme directe.

On peut aussi montrer que les birapports α_j donc aussi les c_j caractérisent, dans la situation ci-dessus, la configuration X, Y, A, B à transformation projective près.

3. HOMOLOGIE DU GROUPE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

3.1 HOMOLOGIE DU GROUPE MULTIPLICATIF D'UN CORPS ET ESPACE PROJECTIF INFINI

A la place des configurations de Menelaüs, on aurait pu utiliser dans la définition du groupoïde \mathcal{G}_n les configurations de Ceva comme sur la figure 8.

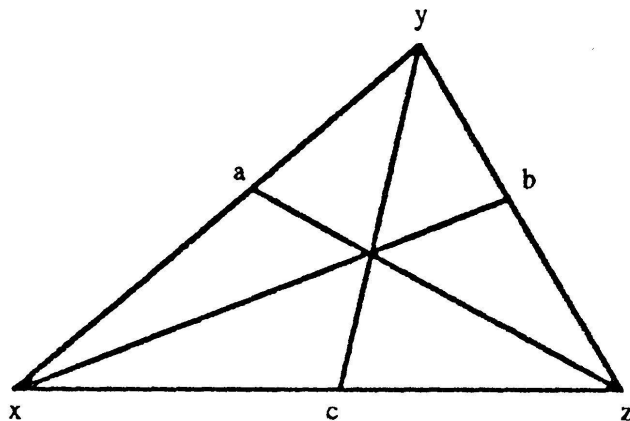


FIGURE 8

On rappelle que le théorème de Ceva exprime le fait que les droites $\langle x, b \rangle$, $\langle y, c \rangle$ et $\langle z, a \rangle$ de la figure 8 sont concourrantes par la condition affine $\frac{ax}{ay} \frac{by}{bz} \frac{cz}{cx} = -1$.

DÉFINITION 5. On note \mathcal{G}'_n le groupoïde ainsi obtenu.

Le groupoïde \mathcal{G}'_n est isomorphe à \mathcal{G}_n . L'isomorphisme avec \mathcal{V}_n est d'ailleurs plus naturel que son analogue pour \mathcal{G}_n . Si F est de caractéristique 2, on a l'égalité $\mathcal{G}'_n = \mathcal{G}_n$; en effet les points a, b, c de la figure 8 sont alors alignés et dans ce cas les configurations de Menelaüs et celles de Ceva coïncident. Noter aussi que sans hypothèse sur F , on obtient un isomorphisme entre \mathcal{G}_n et \mathcal{G}'_n , en termes de générateurs, en associant au générateur $(x \xrightarrow{a} y)$ de \mathcal{G}_n , le générateur $(x \xrightarrow{a'} y)$ de \mathcal{G}'_n , où a' est le

conjugué harmonique de a par rapport à x et y . Que cette correspondance soit compatible avec les relations se traduit par la figure 9. Il faut comprendre cette figure comme suit: si (x, y, a, a') , (x, z, c, c') et (y, z, b, b') sont respectivement en division harmonique, alors la configuration des six points x, y, z, a, b, c est de Menelaüs si et seulement si la configuration x, y, z, a', b', c' est de Ceva; la preuve est un exercice.

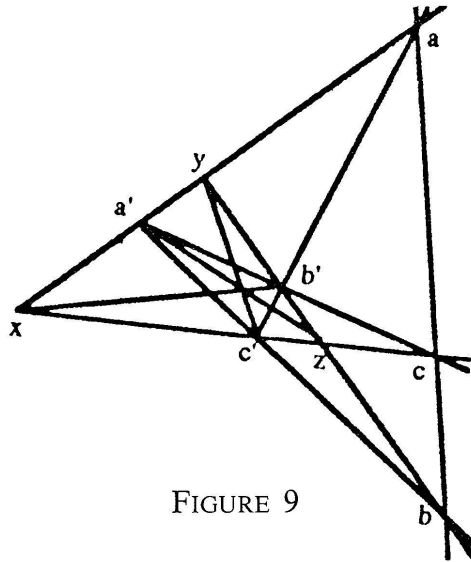


FIGURE 9

DÉFINITION 6. Soit $\mathbf{P}^\infty(F)$ l'espace projectif associé au F -espace vectoriel de dimension dénombrable $F^{(N)}$. De manière analogue à \mathcal{G}'_n , on définit un groupoïde \mathcal{G}'_∞ dont les objets sont les points de $\mathbf{P}^\infty(F)$.

Ce groupoïde est limite inductive des \mathcal{G}'_n . Avant d'utiliser \mathcal{G}'_∞ , rappelons d'abord quelques généralités sur l'homologie des groupoïdes. A tout groupoïde \mathcal{G} et plus généralement à toute petite catégorie, on associe [15] son nerf $\mathcal{N}\mathcal{G}$ qui est un ensemble simplicial. L'ensemble $\mathcal{N}_n\mathcal{G}$ des n -simplexes de $\mathcal{N}\mathcal{G}$ est formé des suites (f_1, f_2, \dots, f_n) de morphismes dont deux successifs sont composables et les opérateurs de faces sont données par

$$\partial_0(f_1, \dots, f_n) = (f_2, \dots, f_n)$$

$$\partial_n(f_1, \dots, f_n) = (f_1, \dots, f_{n-1})$$

$$\partial_i(f_1, \dots, f_n) = (f_1, \dots, f_i f_{i+1}, \dots, f_{n-1}), \text{ pour } i = 1, \dots, n - 1 .$$

L'homologie de \mathcal{G} est alors l'homologie du complexe

$$\dots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{N}_n\mathcal{G}] \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{N}_{n-1}\mathcal{G}] \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{N}_0\mathcal{G}] \rightarrow 0 ,$$

où $\mathbf{Z}[\mathcal{N}_n\mathcal{G}]$ est le \mathbf{Z} -module libre engendré par les n -simplexes de \mathcal{G} et où $d = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i$.

En particulier, un groupe est un groupoïde et on retrouve l'homologie des groupes au sens usuel [2]. D'autre part, l'injection canonique dans \mathcal{G} de $Aut(x)$, considéré comme groupoïde à un seul objet, induit un isomorphisme

en homologie. En fait $Aut(x)$ est équivalent au sens des catégories au groupoïde \mathcal{G} : pour voir ce point, on considère un morphisme de groupoïdes $\mathcal{G} \rightarrow Aut(x)$ en choisissant pour tout y un morphisme $f_y: x \rightarrow y$, et en associant à $g \in Aut(y)$ l'automorphisme de $x: f_y^{-1} \circ g \circ f_y$; une telle équivalence induit une équivalence d'homotopie simpliciale sur les nerfs (voir [15]) d'où un isomorphisme en homologie.

Revenons au groupoïde \mathcal{G}'_∞ ; quelque soit l'objet x de \mathcal{G}'_∞ , le groupe $Aut(x)$ est isomorphe au groupe multiplicatif F^\times . On va décrire un sous-complexe du complexe

$$\cdots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{N}_n \mathcal{G}'_\infty] \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{N}_{n-1} \mathcal{G}'_\infty] \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{N}_0 \mathcal{G}'_\infty] \rightarrow 0,$$

de nature totalement géométrique et dont l'homologie est encore l'homologie de F^\times .

DÉFINITION 7. *On dit qu'un n -simplexe*

$$x_0 \xleftarrow{a_1} x_1 \xleftarrow{a_2} \cdots \xleftarrow{a_n} x_n$$

est générique si ses sommets $(x_i)_{i=0\dots n}$ sont en position générale dans $\mathbf{P}^\infty(F)$, c'est-à-dire s'ils engendrent un sous-espace projectif de dimension n .

DÉFINITION 8. *Pour $n > 0$, on appelle n -repère projectif de $\mathbf{P}^\infty(F)$ la donnée d'un $(n+2)$ -uplet $(x_0, x_1, \dots, x_n, \omega)$ tel que le sous-espace projectif engendré soit de dimension n et tel que les points $x_0, x_1, \dots, x_n, \omega$ soient en position générale dans $\langle x_0, x_1, \dots, x_n, \omega \rangle$. Un 0-repère est constitué d'un point. On note \mathcal{R}_n l'ensemble des n -repères projectifs de $\mathbf{P}^\infty(F)$.*

La donnée d'un n -simplexe générique $x_0 \xleftarrow{a_1} x_1 \xleftarrow{a_2} \cdots \xleftarrow{a_n} x_n$ équivaut à celle d'un n -repère projectif de $\mathbf{P}^\infty(F)$. La correspondance s'obtient comme suit: au n -simplexe générique $x_0 \xleftarrow{a_1} x_1 \xleftarrow{a_2} \cdots \xleftarrow{a_n} x_n$, on associe le n -repère projectif $(x_0, x_1, \dots, x_n, \omega)$, où ω est l'intersection des sous-espaces $\langle a_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, $\langle x_0, a_2, x_3, \dots, x_n \rangle$, ..., $\langle x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, a_n \rangle$. Inversement au n -repère $(x_0, x_1, \dots, x_n, \omega)$ correspond le n -simplexe générique $x_0 \xleftarrow{a_1} x_1 \xleftarrow{a_2} \cdots \xleftarrow{a_n} x_n$, où les a_i sont définis par

$$a_i = \langle x_{i-1}, x_i \rangle \cap \langle x_0, \dots, \widehat{x_{i-1}}, \widehat{x_i}, \dots, x_n, \omega \rangle.$$

Dans la correspondance, l'opérateur de face ∂_i devient

$$\partial_i(x_0, \dots, x_n, \omega) = (x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n, \omega_i),$$

où $\omega_i = \langle x_i, \omega \rangle \cap \langle x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n \rangle$. La figure 10 illustre le cas d'un 2-simplexe.

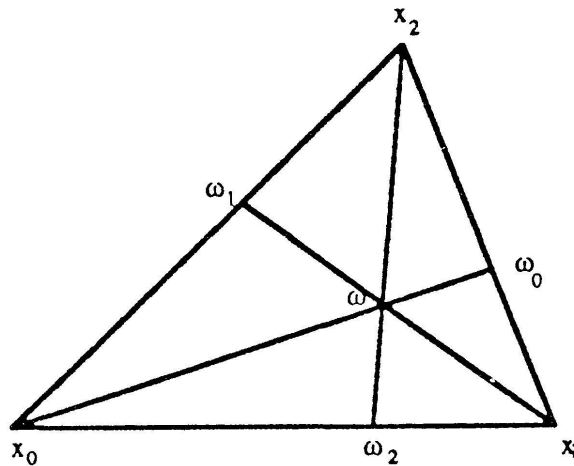


FIGURE 10

Le théorème suivant donne une description projective de l'homologie du groupe multiplicatif d'un corps à l'aide des n -repères projectifs de $\mathbf{P}^\infty(F)$ (comparer avec [7] et la situation topologique classique [12]).

THÉORÈME 4. *L'homologie du complexe*

$$(1) \quad \cdots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{R}_n] \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{R}_{n-1}] \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{R}_0] \rightarrow 0,$$

où $d = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i$ et où ∂_i est décrit géométriquement comme ci-dessus, est isomorphe à l'homologie $H_*(F^\times, \mathbf{Z})$ de F^\times .

Preuve. On va utiliser la définition algébrique de l'homologie des groupes (voir [2]). Soit un groupe G et $\mathbf{Z}[G]$ l'algèbre du groupe G , l'homologie $H_*(G, \mathbf{Z})$ s'obtient à partir de n'importe quelle résolution de \mathbf{Z} par des $\mathbf{Z}[G]$ -modules projectifs

$$\cdots \rightarrow M_n \rightarrow M_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow M_0 \rightarrow \mathbf{Z},$$

en considérant l'homologie du complexe des « coinvariants »

$$\cdots \rightarrow M_n \otimes_{\mathbf{Z}[G]} \mathbf{Z} \rightarrow M_{n-1} \otimes_{\mathbf{Z}[G]} \mathbf{Z} \rightarrow \cdots \rightarrow M_0 \otimes_{\mathbf{Z}[G]} \mathbf{Z}.$$

Soit alors \mathcal{C}_n l'ensemble des $(n + 1)$ -uplets (v_0, v_1, \dots, v_n) de vecteurs indépendants de $F^{(N)}$, on considère le complexe

$$(2) \quad \cdots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{C}_n] \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{C}_{n-1}] \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{C}_0] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z},$$

où $d = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i$, avec $\partial_i(v_0, \dots, v_n) = (v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n)$ et $\varepsilon(\sum n_i(v_i)) = \sum n_i$. Ce complexe est une résolution de \mathbf{Z} par des $\mathbf{Z}[F^\times]$ -modules libres, où l'action de F^\times provient de l'action diagonale $\lambda.(v_0, \dots, v_n)$

$= (\lambda v_0, \dots, \lambda v_n)$. Pour l'acyclicité, on remarque que si $d(\sum_i (v_0^i, \dots, v_n^i)) = 0$, on peut choisir un vecteur v de $F^{(N)}$ indépendant de tous les v_j^i et alors on vérifie que $\sum_i (v_0^i, \dots, v_n^i) = d(\sum_i (v, v_0^i, \dots, v_n^i))$. Pour terminer la preuve, il suffit d'observer que le complexe des coinvariants de (2), sous l'action de $\mathbf{Z}[F^\times]$, s'identifie au complexe (1); cela résulte du fait que les orbites de \mathcal{C}_n sous l'action de F^\times sont en bijection naturelle avec les éléments de \mathcal{R}_n ; en effet à l'orbite de l'élément $(v_0, v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{C}_n$ est associé le n -repère projectif image de $(v_0, v_1, \dots, v_n, \sum v_i)$ par p ; inversement soit un repère projectif $(x_0, x_1, \dots, x_n, \omega)$ et soit D_i la droite au-dessus de x_i et Δ celle au-dessus de ω , ce repère provient de l'orbite de (v_0, v_1, \dots, v_n) , où les v_i sont les éléments de la décomposition d'un vecteur de la droite Δ dans la somme directe des D_i . \square

Le groupe projectif $GP(F^{(N)})$ opère dans le complexe (1) par

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n, \omega) = (f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n), f(\omega)).$$

L'action induite en homologie est triviale. Cela résulte d'un argument standard d'algèbre homologique (voir par exemple [2]); en effet cette action provient, par passage aux coinvariants, d'une action de $GL(F^{(N)})$ dans la résolution (2), action qui est triviale sur \mathbf{Z} et coïncide avec l'action diagonale sur les éléments de \mathcal{C}_n ; noter que cette action commute avec celle de $\mathbf{Z}[F^\times]$.

3.2 HOMOLOGIE DU GROUPE LINÉAIRE ET GRASSMANNIENNES INFINIES

On va esquisser une description géométrique analogue pour l'homologie du groupe linéaire $GL(l, F)$ en utilisant les considérations du paragraphe 2. Relativement à la grassmannienne $\mathbf{G}^{\infty, l}(F)$ des sous-espaces de dimension $l - 1$ de $\mathbf{P}^\infty(F)$, on peut définir des groupoïdes $\mathcal{G}_{\infty, l}$ et $\mathcal{G}'_{\infty, l}$ analogues à \mathcal{G}_∞ et \mathcal{G}'_∞ . Pour $n > 0$, \mathcal{R}_n^l désigne l'ensemble des $(n + 2)$ -uplets $(X_0, X_1, \dots, X_n, Y)$ d'éléments de $\mathbf{G}^{\infty, l}(F)$ tels que $n + 1$ d'entre eux soient en position générale dans $\mathbf{P}^\infty(F)$ et Y est contenu dans le sous-espace $\langle X_0, X_1, \dots, X_n \rangle$: ces $(n + 2)$ -uplets jouent le rôle des repères projectifs; on pose de plus $\mathcal{R}_0^l = \mathbf{G}^{\infty, l}(F)$. On est conduit naturellement à la construction d'un complexe géométrique

$$(3) \quad \dots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{R}_n^l] \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{R}_{n-1}^l] \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{R}_0^l] \rightarrow 0,$$

dont les groupes d'homologie coïncident avec ceux de $GL(l, F)$. Dans (3), $\mathbf{Z}[\mathcal{R}_n^l]$ est le \mathbf{Z} -module libre de générateurs les éléments de \mathcal{R}_n^l , et $d = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i$, où

$$\partial_i(X_0, \dots, X_n, Y) = (X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_n, Y_i),$$

avec $Y_i = \langle X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_n \rangle \cap \langle Y, X_i \rangle$. Le théorème 4 se généralise alors sous la forme suivante.

THÉORÈME 5. *L'homologie $H_*(GL(l, F), \mathbf{Z})$ du groupe linéaire $GL(l, F)$ est isomorphe à celle du complexe (3).*

Preuve. Il suffit encore de remarquer que le complexe (3) s'identifie au complexe des coinvariants d'une résolution de \mathbf{Z} par des $\mathbf{Z}[GL(l, F)]$ -modules libres.

Pour cela, on introduit l'ensemble \mathcal{C}_n^l des

$$\left(\overbrace{(v_0^1, \dots, v_0^l)}^{V_0}, \overbrace{(v_1^1, \dots, v_1^l)}^{V_1}, \dots, \overbrace{(v_n^1, \dots, v_n^l)}^{V_n} \right),$$

où $\{v_i^j\}_{i,j}$ est une famille libre de $F^{(N)}$. Le \mathbf{Z} -module libre $\mathbf{Z}[\mathcal{C}_n^l]$ est aussi un $\mathbf{Z}[GL(l, F)]$ -module libre pour l'action définie comme suit: si $g = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq l}$ et $V = (v_1, \dots, v_l)$, on pose $g \cdot V = (\sum_j a_{1j} v_j, \dots, \sum_j a_{lj} v_j)$ et $g \cdot (V_0, \dots, V_n) = (g \cdot V_0, \dots, g \cdot V_n)$. On a alors une $\mathbf{Z}[GL(l, F)]$ -résolution acyclique de \mathbf{Z}

$$\dots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{C}_n^l] \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{C}_{n-1}^l] \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathbf{Z}[\mathcal{C}_0^l] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z},$$

en posant $d(V_0, \dots, V_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (V_0, \dots, \hat{V}_i, \dots, V_n)$. Indiquons comment \mathcal{R}_n^l paramétrise les orbites de $GL(l, F)$ dans \mathcal{C}_n^l . A l'orbite de l'élément $(V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{C}_n^l$ correspond l'élément $(X_0, X_1, \dots, X_n, Y) \in \mathcal{R}_n^l$ défini comme suit: X_i est associé au sous-espace de $F^{(N)}$ engendré par $\{v_i^1, \dots, v_i^l\}$ et Y à celui engendré par $\{\sum_{i=0}^n v_i^1, \dots, \sum_{i=0}^n v_i^l\}$. \square

Comme au paragraphe précédent, l'action naturelle du groupe projectif $GP(F^{(N)})$ dans le complexe (3) induit l'action triviale en homologie.

A.A. Suslin [16] a prouvé le résultat de stabilité suivant

THÉORÈME 6. *Si F est un corps infini, le morphisme naturel en homologie*

$$H_n(GL(l, F), \mathbf{Z}) \rightarrow H_n(GL(l+1, F), \mathbf{Z}),$$

est un isomorphisme pour $l \geq n$.

Il serait intéressant de retrouver ce résultat de façon géométrique à l'aide de ce qui précède.

4. MULTIRAPPORTS

4.1 GROUPOÏDES ET n -RAPPORTS

Dans ce paragraphe, on fait quelques remarques sur des invariants liés au groupoïde \mathcal{G}_m associé à l'espace projectif $\mathbf{P}^m(F)$. Notons $\check{\mathbf{P}}^m(F)$ le dual projectif de $\mathbf{P}^m(F)$. Si $(x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est un élément de $(\mathbf{P}^m(F))^n \times (\check{\mathbf{P}}^m(F))^n$ tel que $\vec{\varphi}_i(\vec{x}_j) \neq 0$, où $(\vec{\quad})$ désigne un représentant vectoriel, on considère l'élément de F^\times

$$[x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n] = \frac{\vec{\varphi}_1(\vec{x}_1) \vec{\varphi}_2(\vec{x}_2) \dots \vec{\varphi}_n(\vec{x}_n)}{\vec{\varphi}_1(\vec{x}_2) \vec{\varphi}_2(\vec{x}_3) \dots \vec{\varphi}_n(\vec{x}_1)}.$$

C'est un invariant projectif de la configuration constituée des n points x_i et des n hyperplans H_i associés aux φ_i . Remarquer que

$$[x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}; \varphi_{\sigma(1)}, \dots, \varphi_{\sigma(n)}] = [x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n],$$

pour tout élément σ du groupe engendré par le cycle $(12 \dots n)$.

On appelle $[x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n]$ le n -rapport de cette configuration; on le note aussi $[x_1, \dots, x_n; H_1, \dots, H_n]$. Si $m = 1$ et $n = 2$, on a exactement

$$[x_1, x_2; y_1, y_2] = r(x_1, x_2; y_1, y_2).$$

Pour $x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n$ comme ci-dessus, posons $a_i = \langle x_i, x_{i+1} \rangle \cap H_i$ pour $i \neq n$ et $a_n = \langle x_1, x_n \rangle \cap H_n$.

PROPOSITION 4. *On a dans le groupoïde \mathcal{G}_m l'interprétation géométrique suivante du n -rapport*

$$[x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n] = f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1,$$

où $f_i = x_i \xrightarrow{a_i} x_{i+1}$ pour $i \neq n$ et $f_n = x_{n+1} \xrightarrow{a_n} x_1$.

Preuve. Il suffit de remarquer que l'application linéaire $p^{-1}(x_i) \rightarrow p^{-1}(x_{i+1})$ dont le graphe est conjugué harmonique de $p^{-1}(a_i)$ par rapport à $p^{-1}(x_i)$ et $p^{-1}(x_{i+1})$ associe à \vec{x}_i le vecteur $\frac{\vec{\varphi}_i(\vec{x}_i)}{\vec{\varphi}_{i+1}(\vec{x}_{i+1})} \vec{x}_{i+1}$. \square

Montrons sur un exemple comment les n -rapports apparaissent naturellement dans certains invariants projectifs. Soit V un F -espace vectoriel de dimension finie et V^* son dual, si $\sigma \in S_n$ est une permutation, l'application multilinéaire

$$I_\sigma: V^n \times (V^*)^n \rightarrow F$$

$$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; \vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n) \mapsto \prod_{i=1}^n \vec{\varphi}_i(\vec{x}_{\sigma(i)})$$

est invariante sous l'action diagonale de $GL(V)$ dans $V^n \times (V^*)^n$ (il est bien connu [14] que ces fonctions jouent un rôle en théorie des invariants). Par suite, si $(x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ sont comme précédemment et si $\sigma, \mu \in S_n$, on obtient un invariant projectif $J_{\sigma, \mu}$ à valeurs dans F^\times en posant

$$J_{\sigma, \mu}(x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n) = \frac{I_\sigma(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; \vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n)}{I_\mu(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; \vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n)}$$

Soit alors

$$(i_1, i_2, \dots, i_k) (j_1, j_2, \dots, j_l) \cdots (t_1, t_2, \dots, t_s)$$

la décomposition en cycles de la permutation $\sigma^{-1}\mu$, on vérifie facilement la relation

$$J_{\sigma, \mu}(x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n) = [x_{\sigma(i_1)}, \dots, x_{\sigma(i_k)}; \varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k}] \cdot [x_{\sigma(j_1)}, \dots, x_{\sigma(j_l)}; \varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_l}] \cdots [x_{\sigma(t_1)}, \dots, x_{\sigma(t_s)}; \varphi_{t_1}, \dots, \varphi_{t_s}] .$$

4.2 REMARQUES SUR UN INVARIANT DE GONCHAROV

Considérons $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, 2n$ points en position générale de $\mathbf{P}^{n-1}(F)$ et posons

$$[[x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n]] = [x_1, \dots, x_n; H_1, \dots, H_n] ,$$

où H_i est l'hyperplan $\langle y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n \rangle$; on obtient un invariant projectif qui vérifie en particulier

$$[[x_1, x_2; y_1, y_2]] = (r(x_1, x_2; y_1, y_2))^{-1} .$$

Soit «dét» le déterminant dans une base arbitraire de F^{n+1} , d'après la définition du n -rapport, on peut écrire

$$[[x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n]] = \frac{\prod_{i=1}^n \text{dét}(\vec{y}_1, \dots, \hat{\vec{y}}_i, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_i)}{\prod_{i=1}^n \text{dét}(\vec{y}_1, \dots, \hat{\vec{y}}_i, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{\tau(i)})} ,$$

où τ est la permutation cyclique $(12 \dots n)$; en particulier si on prend comme coordonnées homogènes de $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{matrix} ,$$

on a l'expression

$$[[x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n]] = \frac{a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}}{a_{12} a_{23} \cdots a_{n1}} .$$

Soit $\mathbf{Z}[F^\times]$ l'algèbre du groupe multiplicatif de F . On définit un invariant projectif de $2n$ points x_1, \dots, x_{2n} en position générale de $\mathbf{P}^{n-1}(F)$ en posant dans $\mathbf{Z}[F^\times]$

$$\tilde{r}_n(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \varepsilon_\sigma [[x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(2n)}]] .$$

Pour $n = 3$ on retrouve l'invariant de 6 points du plan projectif $\mathbf{P}^2(F)$ considéré par Goncharov dans son travail sur la conjecture de Zagier [8].

La proposition 4 montre que, pour $n = 3$, $[[x_1, \dots, x_6]]$ s'interprète dans le groupoïde \mathcal{G}_2 comme la composée $f_3 \circ f_2 \circ f_1$, où $f_1 = x_1 \xrightarrow{a_1} x_2$, $f_2 = x_2 \xrightarrow{a_2} x_3$, $f_3 = x_3 \xrightarrow{a_3} x_1$ et les points a_i sont comme sur la figure 11.

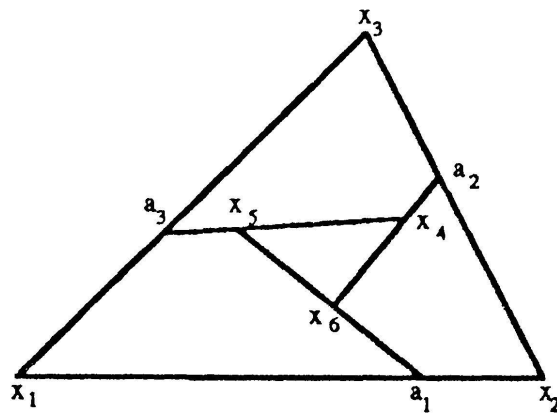


FIGURE 11

On aurait pu aussi procéder en s'inspirant de la figure 12, c'est-à-dire poser

$$[[x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n]]' = [x_1, \dots, x_n; L_1, \dots, L_n] ,$$

où L_i est l'hyperplan $\langle y_i, x_1, \dots, \widehat{x_i}, \widehat{x_{i+1}}, \dots, x_n \rangle$, où $x_{n+1} \equiv x_1$ et définir l'invariant projectif de $2n$ points

$$\tilde{r}'_n(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \varepsilon_\sigma [[x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(2n)}]]' .$$

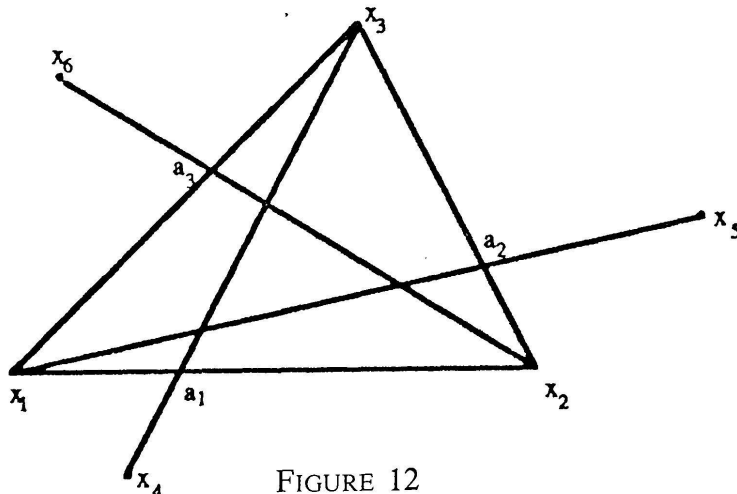


FIGURE 12

Ces deux invariants sont essentiellement les mêmes.

PROPOSITION 5. *Considérons l'involution de $\mathbf{Z}[F^\times]$ donnée par*

$$\lambda_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2} + n - 1} \mu_n$$

où μ_n est l'involution de $\mathbf{Z}[F^\times]$ provenant de la multiplication par $(-1)^n$ dans F^\times , on a

$$\tilde{r}'_n = \lambda_n \circ \tilde{r}_n .$$

Preuve. Pour simplifier on posera

$$|j_1, \dots, j_n| := \det(\vec{x}_{j_1}, \dots, \vec{x}_{j_n}) .$$

On a la relation

$$\begin{aligned} & \frac{|n+1, 3, \dots, n, 1| \dots |n+i, 1, \dots, \widehat{i, i+1}, \dots, n, i| \dots |2n, 2, \dots, n-1, n|}{|n+1, 3, \dots, n, 2| \dots |n+i, 1, \dots, \widehat{i, i+1}, \dots, n, i+1| \dots |2n, 2, \dots, n-1, 1|} \\ &= (-1)^n \frac{|1, 3, \dots, n, n+1| \dots |1, \dots, \widehat{i+1}, \dots, n, n+i| \dots |2, \dots, n, 2n|}{|2, 3, \dots, n, n+1| \dots |1, \dots, \widehat{i}, \dots, n, n+i| \dots |1, 2, \dots, n-1, 2n|} \\ &= (-1)^n \frac{|2, 3, \dots, n, 2n| \dots |1, \dots, \widehat{i+1}, \dots, n, n+i| \dots |1, \dots, n-1, 2n-1|}{|2, 3, \dots, n, n+1| \dots |1, \dots, \widehat{i+1}, \dots, n, n+i+1| \dots |1, \dots, n-1, 2n|} . \end{aligned}$$

Par suite,

$$[[x_1, \dots, x_{2n}]]' = (-1)^n [[x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(2n)}]] ,$$

où τ est la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & \dots & 2n \\ 2n & n+1 & \dots & 2n-1 & 1 & \dots & n \end{pmatrix} .$$

La signature de τ est égale à $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2} + n - 1}$, d'où la proposition. \square

On voit que si $\omega: \mathbf{Z}[F^\times] \rightarrow F$ est le morphisme de \mathbf{Z} -modules déduit de l'injection de F^\times dans F , alors $\omega \circ \tilde{r}_n = 0$ pour $n \equiv 0, 3 \pmod{4}$; l'analogue classique de l'invariant de Goncharov \tilde{r}_3 est donc trivial.

Dans la preuve de la conjecture de Zagier, pour $n = 2$ et 3 , l'invariant \tilde{r}_n est couplé au n -logarithme (voir [9, 8, 4]); l'analogue pour $n > 3$ est une question intéressante qui reste mystérieuse.

Après soumission de cet article, j'ai appris l'existence de deux preprints qui considèrent aussi la catégorie des points de l'espace projectif. Elle semble avoir

été introduite par Koch [11] dans une courte note ancienne et non publiée; Diers et Leroy [5] l'utilisent pour retrouver des résultats classiques de géométrie. Les résultats qui précèdent sont indépendants de ces articles.

RÉFÉRENCES

- [1] BERGER, M. *Géométrie*, 5 volumes, Editions Cedic, 1977-78.
- [2] BROWN, K.S. *Cohomology of groups*. Grad. Texts in Math., Springer-Verlag 1982.
- [3] BROWN, R. From groups to groupoids: a brief survey. *Bull. London Math. Soc.* 19 (1987), 113-134.
- [4] CATHELINÉAU, J.L. Homologie du groupe linéaire et polylogarithmes. *Sém. Bourbaki 1992/93 exp. 772. Astérisque 216* (1993), 311-341.
- [5] DIERS, Y. et J. LEROY. Catégorie des points d'un espace projectif. *Cahiers de Géométrie Différentielle* 35 (1994), 2-29.
- [6] FULTON, W. *Intersection Theory*. Springer Verlag, 1984.
- [7] JARDINE, J.F. Geometric Models for the K -Theory of Fields. *J. of Algebra* 84 (1983), 220-239.
- [8] GONCHAROV, A.B. Geometry of configurations, polylogarithms and motivic cohomology. *Adv. in Math.* 114 (1995), 197-318.
- [9] ——— Polylogarithms and motivic Galois groups. Proc. of the Seattle conf. on motives, Seattle July 1991. *A.M.S. Proc. Symp. in Pure Math.* 55 (1994) 2, 43-96.
- [10] GREENBERG, P. Triangulating groups, two examples. Preprint, Grenoble 1992.
- [11] GRIFFITH, Ph. and J. HARRIS. *Principles of Algebraic Geometry*. John Wiley and Sons, 1978.
- [12] HUSEMOLLER, D. *Fibre Bundles*. Grad. Texts in Math., Springer Verlag, 1975.
- [13] KOCK, A. The category aspect of projective space. Aarhus Universitet, preprint 1974.
- [14] PROCESI, C. The invariant theory of $n \times n$ matrices. *Adv. in Math.* 19 (1976), 306-381.
- [15] SEGAL, G. Classifying spaces and spectral sequences. *Publ. I.H.E.S.* 34 (1968), 105-112.
- [16] SUSLIN, A.A. *Homology of GL_n , characteristic classes and Milnor K -theory*. Springer Lect. Notes in Math. 1046 (1989), 357-375.

(Reçu le 12 octobre 1994)

Jean-Louis Cathelineau

Laboratoire Jean Dieudonné
 URA CNRS 168
 Parc Valrose
 F-06108 Nice Cedex 2
 France