

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 40 (1994)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNIMODULAR LATTICES WITH A COMPLETE ROOT SYSTEM  
**Autor:** Kervaire, Michel

**Bibliographie**

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61105>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

(4)  $8A_4$ 

Let  $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ ,  $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ . Any metabolizer must have a basis of the form  $\{e_i + v_i, i = 1, 2, 3, 4\}$  for some vectors  $v_i \in \mathbf{F}_5^4$  of weight 3 or 4.

Hence, we may assume that the first basis vector is either  $s_1 = e_1 + (1, 1, 1, 1)$  or  $t_1 = e_1 + (0, 1, 2, 2)$ .

If we start with  $s_1$ , there are essentially only 2 ways of completing  $s_1$  to an admissible metabolizer with 3 vectors forming with  $s_1$  the rows of the matrix  $S$  exhibited in the table and the matrix  $S'$ :

$$S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

If we start with  $t_1$  there is essentially only one way to complete to a metabolizer:

$$S'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

All these metabolizers are equivalent. The permutation  $\rho$  defined by

$$\rho(x_0, \dots, x_7) = (x_4, x_1, x_2, -x_3, x_7, x_5, x_6, x_0)$$

sends  $S'$  to  $S$  and  $\sigma$  defined by

$$\sigma(x_0, \dots, x_7) = (x_5, x_1, x_4, x_0, x_7, x_2, x_3, x_6)$$

sends  $S''$  to  $S$ .

Thus the lattice described by the filling set  $S$  is the only one with the root system  $8A_4$ .

## BIBLIOGRAPHY

- [B] BOURBAKI, N. *Groupes et Algèbres de Lie*, Chap. VI, Hermann, 1968.
- [CP] CONWAY, J. and V. PLESS. On the enumeration of self-dual codes. *J. Comb. Th. Ser. A* 28 (1980), 26-53.
- [CPS] CONWAY, J., V. PLESS and N. SLOANE. Self-dual codes over GF(3) and GF(4) of length not exceeding 16. *IEEE Trans. on Inform. Th., Vol. IT-25* (1979), 312-322.

- [KV] KOCH, H. and B. VENKOV. Über ganzzahlige unimodulare euklidische Gitter. *J. reine angew. Math.* 398 (1989), 144-168.
- [Kn] KNESER, M. Klassenzahlen definitiver quadratischer Formen. *Arch. Math.* 8 (1957), 241-250.
- [MH] MILNOR, J. and D. HUSEMÖLLER. *Symmetric bilinear forms*. Ergebnisse der Math., Bd. 73, Springer Verlag, 1973.
- [N] NIEMEIER, H.-V. Definite quadratische Formen der Dimension 24 und Diskriminante 1. *J. Number Th.* 5 (1973), 142-178.
- [Sch] SCHARLAU, W. *Quadratic and Hermitian Forms*. Grundlehren der Math. Wiss., 270, Springer, 1985.
- [Se] SERRE, J.-P. *Cours d'Arithmétique*. P.U.F., 1970.

(Reçu le 31 août 1993)

Michel Kervaire

Institut de Mathématiques  
Université de Genève  
Case Postale 240  
1211 Genève 24