

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 40 (1994)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LE CODAGE DU FLOT GÉODÉSIQUE SUR LA SURFACE MODULAIRE  
**Autor:** Arnoux, Pierre  
**Kapitel:** 7. Un codage du flot géodésique sur un alphabet fini  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61103>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

7. UN CODAGE DU FLOT GÉODÉSIQUE SUR UN ALPHABET FINI

Un choix différent de la surface de section conduit à retrouver d'autres algorithmes de fractions continues. En particulier, si, dans la procédure donnée au paragraphe 4, on inverse les deux dernières étapes, c'est-à-dire si on prolonge le segment vertical jusqu'à rencontrer une deuxième fois le segment horizontal avant de poursuivre celui-ci (cf. Fig. 6), on obtient un domaine fondamental différent, caractérisé par  $0 \leq a \leq 1 \leq b \leq 1 + a$ , sans condition sur les deux autres coefficients, sauf  $ad + bc = 1$ .

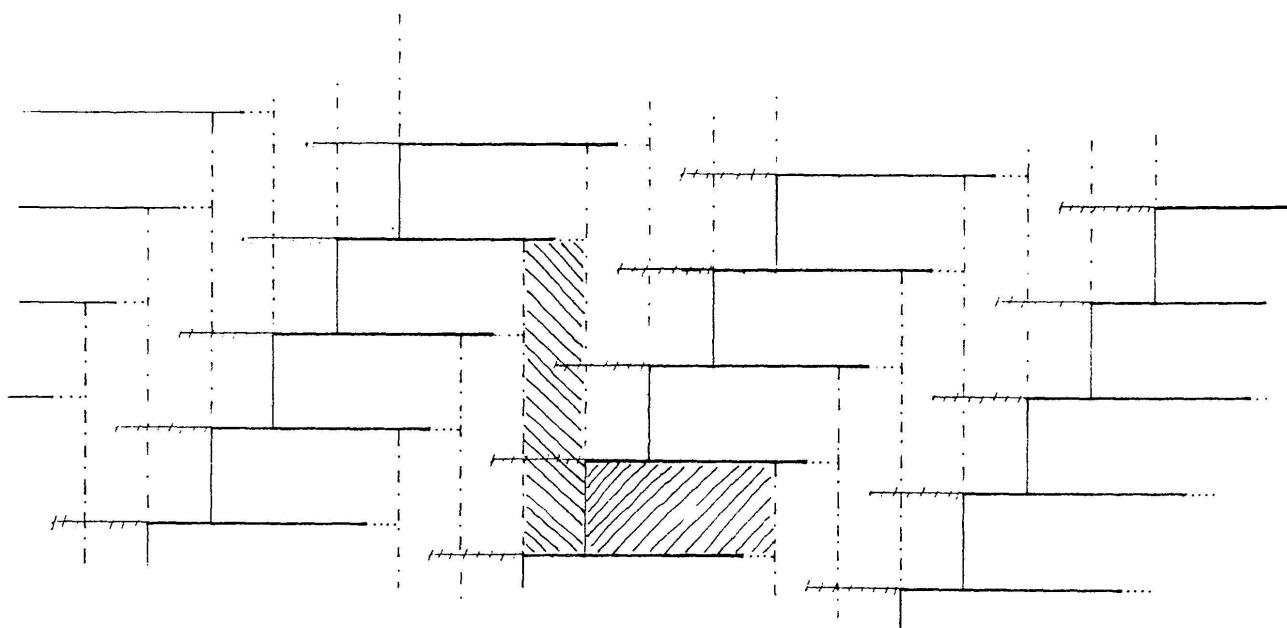


FIGURE 6

On peut alors refaire la même étude qu'au paragraphe 5, en définissant deux domaines  $\Omega'_0$  et  $\Omega'_1$ , avec des faces rentrantes et sortantes. L'une des faces rentrantes,  $\Sigma'_0$ , est formée des matrices du type  $\begin{pmatrix} a & c \\ -1 & d \end{pmatrix}$ , avec  $a < 1$  et  $c, d$  positifs, et  $\Sigma'_1$  est définie de façon symétrique. La surface de section sur laquelle on définit l'application de premier retour est  $\Sigma'_0 \cup \Sigma'_1$ .

On peut paramétrer  $\Sigma'_0$  par  $a$  et  $c$ , tous deux compris entre 0 et 1, et  $\tilde{\Sigma}'$  par  $(a, c, \varepsilon)$ , avec  $\varepsilon = 0$  ou 1. Un calcul simple montre que l'application de premier retour en  $\tilde{\Sigma}'$  est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{T}'_1: \tilde{\Sigma}' &\rightarrow \tilde{\Sigma}' \\ (a, c, \varepsilon) &\mapsto \left( \frac{a}{1-a}, c(1-a), \varepsilon \right) \quad \text{si } a < \frac{1}{2} \\ (a, c, \varepsilon) &\mapsto \left( \frac{1-a}{a}, 1-c(1-a), 1-\varepsilon \right) \quad \text{si } a \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

C'est un revêtement d'ordre 2 de l'application représentée ci-dessous (cf. Fig. 7); elle a un domaine de définition très simple, mais des formules un peu compliquées (en particulier, elle ne préserve pas la mesure de Lebesgue). En utilisant la partition de Markov naturelle pour cette fonction, on peut coder le flot géodésique par un alphabet à deux lettres.

En utilisant comme coordonnées non plus  $(a, c)$  mais  $(a, d)$ , avec  $0 \leq a < 1$  et  $0 \leq d < 1/a$ , on trouve pour l'application de premier retour la forme suivante:

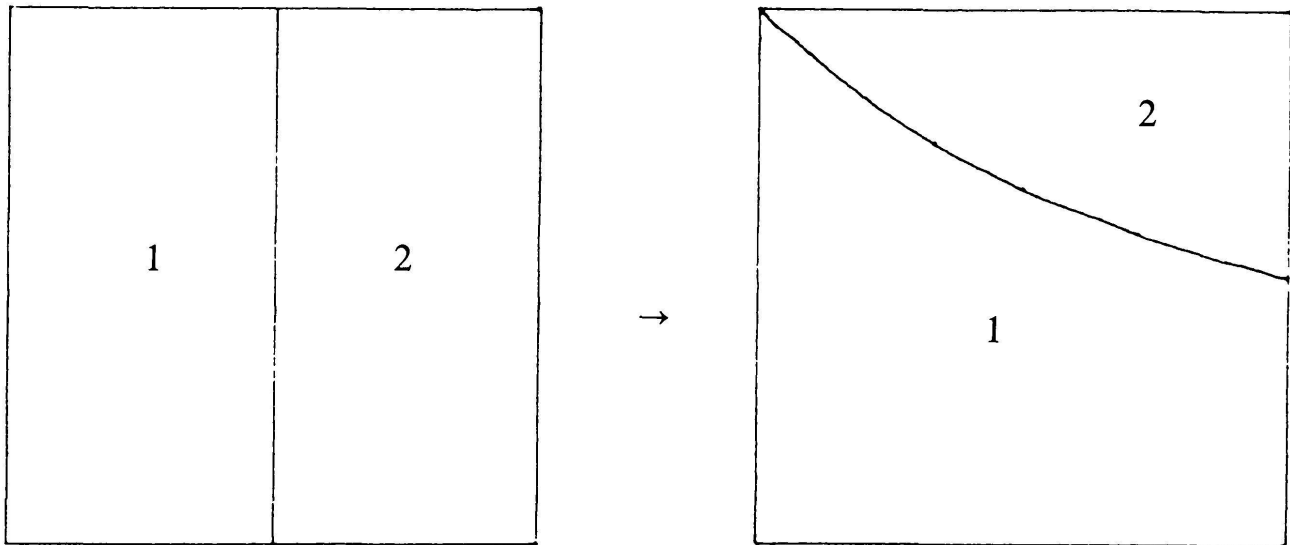


FIGURE 7

$$\tilde{T}' : \tilde{\Sigma}' \rightarrow \tilde{\Sigma}'$$

$$(a, d, \varepsilon) \mapsto \left( \frac{a}{1-a}, d(1-a)^2 + (1-a), \varepsilon \right) \quad \text{si } a < \frac{1}{2}$$

$$(a, d, \varepsilon) \mapsto \left( \frac{1-a}{a} a - a^2 d, 1 - \varepsilon \right) \quad \text{si } a \geq \frac{1}{2}.$$

C'est un revêtement de l'application schématisée dans la figure 8; cette application préserve la mesure de Lebesgue, et son domaine est de mesure infinie.

Dans les deux cas, l'application de premier retour se projette sur la première coordonnée en l'application  $T'$  de l'intervalle  $[0, 1]$  définie par  $T'(x) = x/(1-x)$  si  $x < 1/2$ ,  $T'(x) = (1-x)/x$  si  $x \geq 1/2$ . On peut voir cette application comme la version projective de l'algorithme qui consiste à prendre deux nombres positifs  $a$  et  $b$ , à soustraire le plus petit du plus grand et à itérer l'opération; on réalise ainsi l'algorithme d'Euclide en ne faisant que des soustractions, donc avec beaucoup d'étapes intermédiaires. Il s'agit d'une

version «lente» de l'algorithme des fractions continues: si  $x$  est compris entre  $1/(n+1)$  et  $1/n$ , alors  $\{1/x\} = T'^n(x)$ .

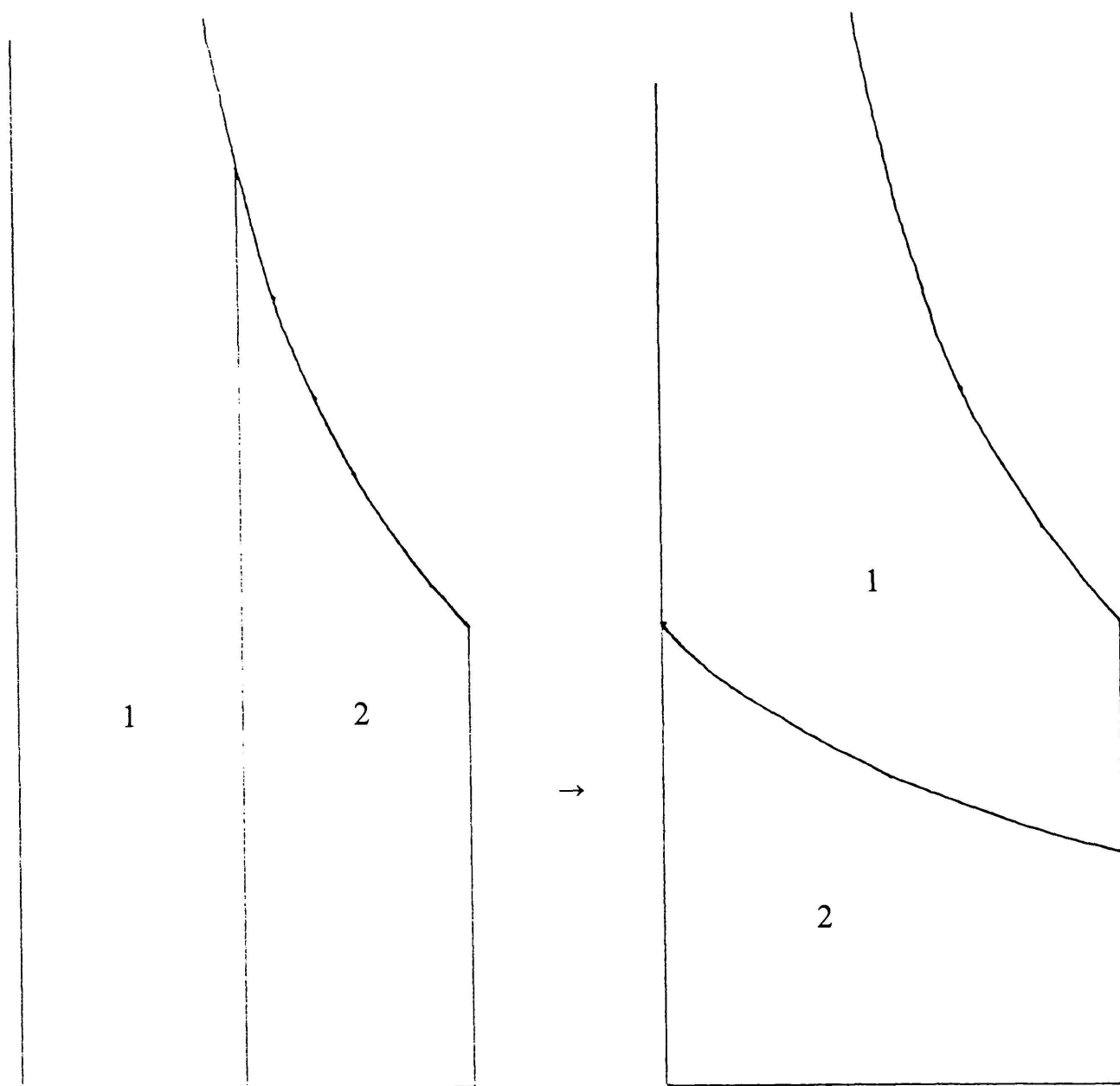


FIGURE 8

## RÉFÉRENCES

- [AF] ADLER, R. and L. FLATTO. Geodesic flows, interval maps and symbolic dynamics. *Bull. Amer. Math. Soc.* 25 (1991), 229-334.
- [AN] ARNOUX, P. et A. NOGUEIRA. Mesures de Gauss pour des algorithmes de fractions continues multidimensionnelles. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 26 (1993), 645-664.
- [Ar] ARTIN, E. Ein mechanisches System mit quasiergodischen Bahnen. *Abh. Math. Sem. Hamburg* 3 (1924), 170-175.