

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 40 (1994)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LE CODAGE DU FLOT GÉODÉSIQUE SUR LA SURFACE MODULAIRE  
**Autor:** Arnoux, Pierre  
**Kapitel:** 5. Le codage du flot géodésique  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61103>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Il peut être utile d'interpréter ces domaines de la façon suivante: tout réseau ne contenant pas de vecteur horizontal possède un unique domaine fondamental formé de deux rectangles alignés, le plus étroit étant de largeur inférieure à 1, le plus large étant plus haut que l'autre, et de largeur supérieure à 1 (cf. Fig. 4). On peut alors prendre comme coordonnées les deux largeurs et la plus petite des hauteurs; l'autre s'en déduit puisque l'aire du domaine fondamental est 1. On retrouve le fait, évident sur les équations, que les domaines  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$  sont de dimension 3;  $\Omega_0$  (resp.  $\Omega_1$ ) correspond au cas où c'est le rectangle de droite (resp. de gauche) qui est le plus grand. Quant à  $\Omega_2$ , il correspond aux réseaux contenant un vecteur horizontal petit; le plus petit rectangle est alors de hauteur nulle, et l'on ne peut plus assurer que la largeur du plus grand rectangle soit supérieure à 1.

## 5. LE CODAGE DU FLOT GÉODÉSIQUE

Dans ces coordonnées, le flot géodésique s'écrit simplement, du moins localement:

$$g_t(a, b, c, d) = (e^{t/2}a, e^{t/2}b, e^{-t/2}c, e^{-t/2}d).$$

Mais pour  $t$  assez grand, les deux premières coordonnées sont plus grandes que 1 (sauf dans le cas particulier où l'une d'entre elles est initialement nulle), et l'on traverse le bord du domaine fondamental; il faut alors faire une identification pour poursuivre l'orbite à partir d'une autre face. Pour décrire complètement le flot, il faut étudier cette identification.

Le domaine  $\Omega_0$  peut être paramétré par les 3 coordonnées  $a, b, c$ , puisque  $d = (1 - bc)/a$ , et plongé dans  $\mathbf{R}^3$  (cf. Fig. 5); il possède alors cinq bords, dont trois, donnés respectivement par les équations  $b = 0$ ,  $c = 0$ ,  $c = 1/(a + b)$ , sont formés de segments d'orbites du flot géodésique. Les deux derniers sont  $\Sigma_0$ , d'équation  $a = 1$ , sur lequel le flot est rentrant, et  $\Lambda_0$ , d'équation  $b = 1$ , sur lequel le flot est sortant. Le bord  $\Sigma_0$  peut être paramétré par  $(b, c)$ , avec  $b \in [0, 1[$  et  $c \in [0, 1/(b + 1)[$ ; on reconnaît le domaine  $\Sigma$  du paragraphe 1. Le bord  $\Lambda_0$  peut, lui, être paramétré par  $(a, c)$ , avec  $a > 1$  et  $c \in [0, 1/(a + 1)[$ .

On peut de même paramétrer  $\Omega_1$ , cette fois par  $(a, b, d)$ , et définir un bord rentrant  $\Sigma_1$ , paramétré par  $(a, d)$ , et un bord sortant  $\Lambda_1$ , paramétré par  $(b, d)$ .

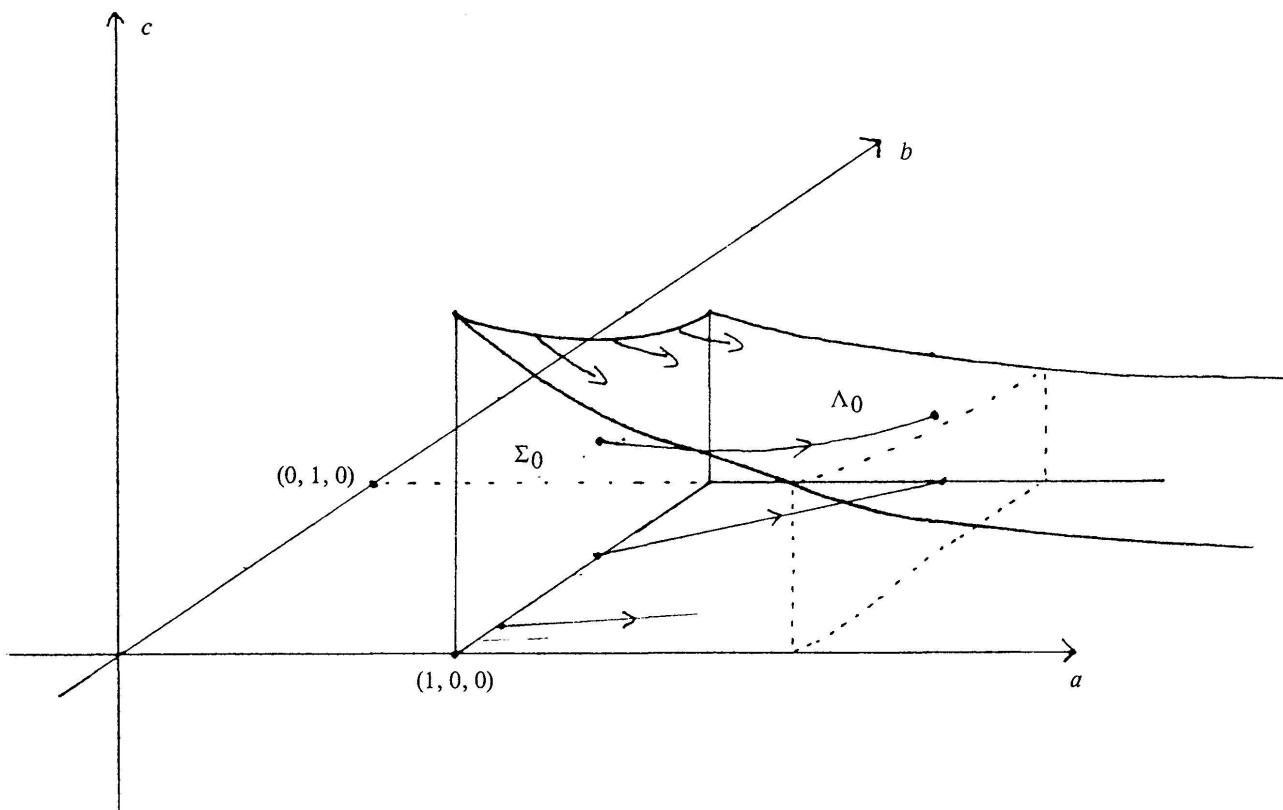


FIGURE 5

Notons  $\tilde{\Sigma} = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$  la réunion des deux bords rentrants; on peut identifier  $\tilde{\Sigma}$  à  $\Sigma \times \{0, 1\}$ , avec coordonnées  $(x, y, \varepsilon)$  où  $\varepsilon$  appartient à  $\{0, 1\}$ ,  $(x, y, \varepsilon)$  correspondant à l'élément  $(x, y)$  de  $\Sigma_\varepsilon$ . Le résultat principal de cet article est le suivant:

**PROPOSITION.** *L'application de premier retour  $\tilde{T}$  du flot géodésique en  $\tilde{\Sigma}$  est un revêtement d'ordre 2 de l'application  $\bar{T}$  définie au paragraphe 1, c'est-à-dire qu'elle est donnée par*

$$\begin{aligned} \tilde{T}: \tilde{\Sigma} = \Sigma \times \{0, 1\} &\rightarrow \tilde{\Sigma} \\ (x, y, \varepsilon) &\mapsto (\{1/x\}, x - x^2y, 1 - \varepsilon). \end{aligned}$$

*Preuve.* La remarque essentielle est que  $\Lambda_0$  s'identifie naturellement à  $\Sigma_1$ ; en effet, le point  $(a, c)$  de  $\Lambda_0$  s'identifie au point  $(\{a\}, (1 - c)/a)$  de  $\Sigma_1$ , par produit par un élément de  $SL(2, \mathbb{Z})$ , en tenant compte du fait que dans la formule suivante on a  $d = (1 - c)/a$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & [a] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ -1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{a\} & c + [a]d \\ -1 & d \end{pmatrix}.$$

Cette identification s'interprète très bien en termes de domaines fondamentaux: on passe d'un domaine fondamental où le plus petit rectangle

est de largeur 1 et le plus grand de largeur  $a$  à un autre où le plus grand rectangle est de largeur 1 et le plus petit de largeur  $\{a\}$  (cf. Fig. 1). De la même façon,  $\Lambda_1$  s'identifie à  $\Sigma_0$ .

Il est alors facile de calculer l'application  $\tilde{T}$  sur  $\Sigma_0$ : partant du point  $(x, y)$  de  $\Sigma_0$ , le flot géodésique arrive au temps  $-2 \log x$  au point  $(1/x, xy)$  de  $\Lambda_0$ , qui est identifié au point  $(\{1/x\}, x - x^2y)$  de  $\Sigma_1$ . Après un calcul symétrique pour les points de  $\Sigma_1$ , on retrouve la formule donnée ci-dessus.  $\square$

*Remarque.* Au lieu de paramétrer  $\Sigma_0$  par  $(b, c)$ , on peut prendre comme coordonnées  $(b, c/d)$ , c'est-à-dire prendre le rapport des hauteurs et le rapport des largeurs (puisque sur  $\Sigma_0$  on a  $a = 1$ , donc  $b = b/a$ ) plutôt que la hauteur et la largeur du plus petit rectangle; ce système de coordonnées fait jouer un rôle symétrique aux largeurs et aux hauteurs, il envoie  $\Sigma_0$  sur le carré unité, et un calcul simple montre que l'application de premier retour s'écrit alors comme un revêtement de l'application  $\tilde{T}_1$  décrite au paragraphe 1.

De la mesure invariante pour  $\tilde{T}$  on déduit une mesure invariante pour  $g_t$ , qui a diverses interprétations: mesure de Haar sur  $SL(2, \mathbf{R})$ , mesure de Liouville pour le flot géodésique, mesure donnée par la métrique riemannienne naturelle sur la surface modulaire... Contrairement aux autres, la mesure induite par la métrique est complètement définie, et pas seulement à une constante multiplicative près, et on peut montrer que la mesure transverse invariante qu'elle définit sur  $\tilde{\Sigma}$  est exactement la mesure de Lebesgue; en particulier, le volume de  $\tilde{\Sigma}$  pour cette mesure transverse est  $2 \log 2$ ; nous utilisons ces faits dans la prochaine section.

En utilisant l'application définie à la fin de la section 1, on peut facilement donner un codage explicite de l'application  $\tilde{T}$ , c'est-à-dire une conjugaison avec un revêtement d'ordre 2 du décalage  $S$  sur  $\mathbf{N}^{\mathbf{Z}}$ . L'ensemble  $I$  défini à la fin de la section 1 correspond ici à l'intersection de la surface de section avec les géodésiques qui repassent une infinité de fois, dans le passé et le futur, dans un domaine compact; le codage est évidemment plus facile dans ce domaine, mais il est aussi possible dans le complémentaire, au moyen de suites finies; nous n'insisterons pas sur ce sujet, sauf pour remarquer que des complications de ce type sont inévitables quand on essaye de conjuguer une application sur une surface et une application sur un ensemble de Cantor comme  $\mathbf{N}^{\mathbf{Z}}$ .

On a même un résultat plus précis que le codage de l'application de premier retour, puisque tout élément du domaine fondamental s'écrit de façon unique  $g_t(x, y, \varepsilon)$ , avec  $(x, y, \varepsilon) \in \tilde{\Sigma}$  et  $0 \leq t < -2 \log x$ ; rappelons

qu'étant données une bijection  $T$  sur un ensemble  $X$  et une application  $f$  définie sur  $X$  à valeurs réelles positives, telle que la série  $\sum f(T^n x)$  tende vers l'infini pour tout point  $x$  de  $X$ , on appelle flot spécial au-dessus de  $X$ , d'application de premier retour  $T$  et de temps de retour  $f$ , le flot  $\phi_s$  sur  $\{(x, t), x \in X, 0 \leq t < f(x)\}$  défini par  $\phi_s(x, t) = (x, t + s)$  si  $t + s < f(x)$ , et  $\phi_s(x, t) = (Tx, 0)$  si  $s + t = f(x)$  (ces formules permettent de définir  $\phi_s(x, t)$  pour tout  $s$ ).

**COROLLAIRE.** *L'application qui au point  $g_t(x, y, \varepsilon)$  associe  $((a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \varepsilon, t)$ , où  $(a_n)$  est le codage de  $(x, y)$  défini dans la section 1, conjugue le flot géodésique à un flot spécial  $\psi_t$  au-dessus de  $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \times \{0, 1\}$ , de temps de retour  $-2 \log [0; a_1, \dots, a_n, \dots]$  et dont l'application de premier retour est un revêtement d'ordre 2 du décalage.*

Il est intéressant de remarquer que le temps de retour à la section ne dépend que de la coordonnée  $x$  (ou de la partie d'indices positifs de la suite  $(a_n)$  associée).

Si, au lieu de s'intéresser aux points individuels, on regarde les géodésiques, on obtient un codage par les suites d'entiers positifs:

**COROLLAIRE.** *On a une bijection entre les géodésiques de la surface modulaire et les couples  $(u, \varepsilon)$  ( $u$  suite finie ou infinie d'entiers positifs,  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ ) modulo l'équivalence  $(u, \varepsilon) \equiv (Su, 1 - \varepsilon)$ . En particulier, une géodésique tend vers l'infini si et seulement si la suite  $u$  n'est pas définie au-delà d'un certain rang, elle vient de l'infini si et seulement si elle n'est pas définie avant un certain rang. Une géodésique est périodique si et seulement si la suite  $(u_n)$  associée est périodique, et dans ce cas, si  $p$  est la plus petite période paire de la suite, la longueur de la géodésique est  $\sum_{j=0}^{p-1} -2 \log [0; \overline{u_{j+1}, \dots, u_{j+p}}]$ .*

*Preuve.* Seule la dernière assertion demande une démonstration; mais il suffit de calculer le temps nécessaire pour aller du point  $(u, \varepsilon, 0)$  à lui-même, en calculant les  $p$  temps de retour intermédiaire à la section, d'après la formule donnée au corollaire précédent.  $\square$