

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 40 (1994)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE CODAGE DU FLOT GÉODÉSIQUE SUR LA SURFACE MODULAIRE
Autor: Arnoux, Pierre
Kapitel: 3. Une autre présentation du flot géodésique
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-61103>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

3. UNE AUTRE PRÉSENTATION DU FLOT GÉODÉSIQUE

Nous allons donner une autre interprétation de ce flot: on peut considérer une matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de $SL(2, \mathbf{R})$ comme formée de deux vecteurs lignes $e_1^t = (a, c)$ et $e_2^t = (b, d)$. On lui associe ainsi une base (e_1, e_2) de \mathbf{R}^2 orientée dans le sens positif et dont le «carré unité» $\{xe_1 + ye_2, 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$ est de volume 1. La multiplication à droite de cette matrice par une matrice M correspond, si l'on considère les vecteurs, à l'action standard sur le plan \mathbf{R}^2 de la matrice transposée M^t . Le flot géodésique consiste à «aplatir» la base donnée sur l'axe des abscisses, et l'espace quotient $SL(2, \mathbf{R})/SO(2, \mathbf{R})$ s'interprète comme espace des bases à isométrie près. On peut facilement retrouver le modèle de Poincaré: si nous assimilons \mathbf{R}^2 à \mathbf{C} , on peut associer à une base (e_1, e_2) un couple (z_1, z_2) de nombres complexes, et définir une application

$$\begin{aligned} \phi: SL(2, \mathbf{R}) &\rightarrow \mathbf{H} \\ (e_1, e_2) &\mapsto z = z_2/z_1. \end{aligned}$$

Il est clair que ϕ est invariante par isométrie, et son image appartient au demi-plan supérieur; c'est une version explicite de l'identification donnée au paragraphe précédent entre le demi-plan de Poincaré et le quotient $SL(2, \mathbf{R})/SO(2, \mathbf{R})$.

La multiplication à gauche par un élément $\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ de $SL(2, \mathbf{Z})$ remplace (e_1, e_2) par $(ae_1 + \beta e_2, \gamma e_1 + \delta e_2)$, qui est une autre base du même réseau $\mathbf{Z}e_1 + \mathbf{Z}e_2$, et l'on obtient de cette façon toutes les bases directes de ce réseau. Le quotient à gauche $SL(2, \mathbf{Z}) \backslash SL(2, \mathbf{R})$ est donc l'espace des réseaux.

Pour pouvoir décrire explicitement le flot géodésique, il nous faut disposer de coordonnées sur cet espace des réseaux, c'est-à-dire donner une façon de choisir une base pour un réseau donné. La méthode classique est celle de Minkowski, qui consiste à choisir pour e_1 le plus court vecteur du réseau (bien défini au signe près, sauf si le réseau est carré ou hexagonal), et pour e_2 le plus court vecteur du réseau qui soit indépendant de e_1 et forme une base positivement orientée (bien défini, sauf si le réseau est hexagonal). Cette méthode est évidemment équivariante par toute isométrie, et il est facile de vérifier que les bases obtenues se projettent, via l'application ϕ , sur le domaine fondamental de l'action de $SL(2, \mathbf{Z})$ sur \mathbf{H} que nous avons défini dans la section 2. L'action triviale de $-Id$ sur le fibré unitaire tangent correspond au

fait que la méthode de Minkowski donne pour chaque réseau deux bases opposées l'une de l'autre; les réseaux pour lesquels cette méthode fournit plus de deux bases (réseaux carrés et hexagonaux) sont projetés sur les deux points singuliers de la surface modulaire.

4. UN SYSTÈME DE COORDONNÉES SUR L'ESPACE DES RÉSEAUX

Nous allons définir une autre méthode pour fixer des coordonnées, qui conduit à des calculs plus faciles. Etant donné un réseau dans \mathbf{R}^2 (identifié à \mathbf{C} pour la commodité de notation), on définit pour chaque point x du réseau l'intervalle horizontal ouvert $H_x =]x - 1, x + 1[$. La demi-droite verticale issue de x recoupe au moins un autre intervalle horizontal: en effet, soit le réseau contient un vecteur vertical, et cette demi-droite rencontre un autre point du réseau, soit il n'en contient pas, donc les deux vecteurs d'une base du réseau ont des abscisses rationnellement indépendantes, et il y a des points du réseau arbitrairement proches de la demi-droite.

Soit H_y le premier intervalle rencontré, et supposons que le point de rencontre soit à gauche de y . Ce point de rencontre peut s'écrire $x + ic = y - a$; on appellera V_x l'intervalle vertical $[x, x + ic[$ qu'il définit. On prolonge ensuite vers la droite tous les intervalles horizontaux jusqu'à rencontrer un intervalle vertical, ce qui est toujours possible par un raisonnement du même type que ci-dessus. Par symétrie, pour tout intervalle V_x , il existe un seul H_z dont le prolongement le coupe; on écrira $z + b = x + id$ le point d'intersection. Il est clair que (a, c) et $(-b, d)$ sont des vecteurs du réseau, et on vérifie sans peine qu'ils forment une base (cf. Fig. 4; en fait, cette construction donne un domaine fondamental pour le réseau formé de deux rectangles, l'un de base a et de hauteur d , l'autre de base b et de hauteur c). On vérifie immédiatement que l'on a, par construction, $0 < a < 1 \leq b$ et $0 \leq d < c$.

Si le premier point de rencontre avec H_y est à droite de y , on peut faire la construction symétrique, et on obtient une base (a, c) , $(-b, d)$ avec $0 < b < 1 \leq a$ et $0 \leq c < d$.

Cette construction tombe en défaut dans deux cas:

— si le premier point d'intersection est égal à y ; dans ce cas le réseau contient un vecteur vertical, et on peut trouver une base de la forme $(0, c)$, $(-b, d)$ avec $d < c$, $b \geq 1$ (et aussi une base de la forme (a, c) , $(0, d)$ avec $c < d$, $a \geq 1$);

— si le premier point d'intersection est contenu dans deux intervalles horizontaux, et dans ce cas le réseau contient un vecteur horizontal, et il y a une base de la forme $(a, 0)$, $(-b, d)$, avec $b < a < 1$.