

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 40 (1994)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE CODAGE DU FLOT GÉODÉSIQUE SUR LA SURFACE MODULAIRE
Autor: Arnoux, Pierre
Kapitel: 0. Introduction
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-61103>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LE CODAGE DU FLOT GÉODÉSIQUE SUR LA SURFACE MODULAIRE

par Pierre ARNOUX

RÉSUMÉ. Nous donnons une preuve élémentaire et explicite du fait que le flot géodésique sur la surface modulaire (quotient du plan hyperbolique par l'action de $SL(2, \mathbf{Z})$) peut être codé en utilisant les fractions continues.

ABSTRACT. We give an elementary and explicit proof of the coding of the geodesic flow on the modular surface by continued fractions.

0. INTRODUCTION

Il est connu depuis longtemps, par un travail d'Artin [Ar] que le flot géodésique sur la surface modulaire peut être codé en utilisant les fractions continues; les articles récents d'Adler et Flatto et de Series ont fait une étude approfondie de ce codage ([AF], [Se]). Le but de cet article est de retrouver ce résultat de façon explicite et élémentaire en mettant un système de coordonnées adapté sur le fibré unitaire tangent de la surface modulaire.

De façon plus précise, on peut définir algébriquement le flot géodésique sur la surface modulaire comme l'action à droite, sur l'espace quotient $SL(2, \mathbf{Z}) \backslash SL(2, \mathbf{R})$, du groupe des matrices diagonales positives de la forme $g_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$ (nous rappellerons plus bas la démonstration); mais on peut aussi voir $SL(2, \mathbf{Z}) \backslash SL(2, \mathbf{R})$ comme l'espace des réseaux de \mathbf{R}^2 dont le domaine fondamental est de volume 1, et l'action de g_t consiste alors à écraser le réseau le long de l'axe des abscisses, en multipliant les abscisses par $e^{t/2}$ et les ordonnées par $e^{-t/2}$.

Pour la plupart des réseaux (ceux qui ne contiennent pas de vecteurs horizontaux ou verticaux), on peut trouver un domaine fondamental en forme de L , formé de deux rectangles accolés; l'action du flot dilate les bases de ces

domaines fondamentaux et écrase leurs hauteurs, on peut alors revenir à un domaine de base plus petite en découpant le grand rectangle et en empilant les morceaux obtenus au-dessus du petit rectangle (cf. Fig. 1). Si l'on part de deux rectangles de bases respectives a et $b < a$, l'opération initiale est la division euclidienne de a par b , le quotient apparaît dans le nombre d'empilements au-dessus de b , puis on reprend l'opération avec b et le reste de la division, de manière identique à l'algorithme d'Euclide; mais ici l'algorithme ne termine jamais dès que les deux nombres sont incommensurables: il s'agit en fait de la version vectorielle de l'algorithme classique des fractions continues, et un calcul simple montre que si les quotients successifs obtenus sont a_1, a_2, \dots , on a:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

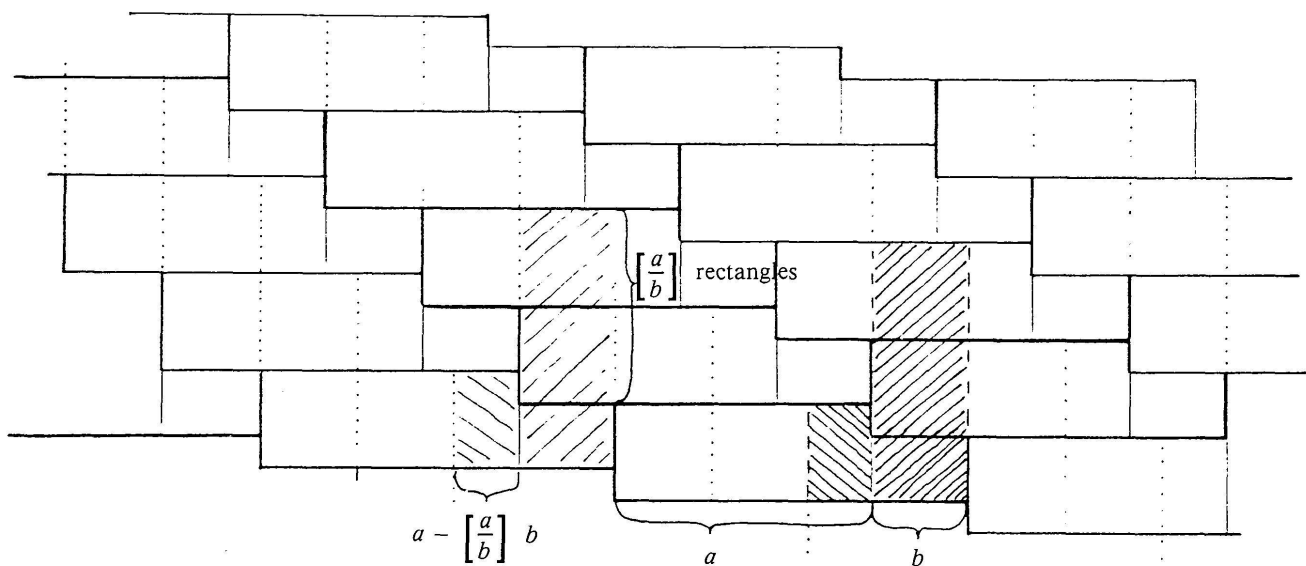


FIGURE 1

Il est clair que rien n'est changé si l'on multiplie a et b par la même constante, on peut donc à chaque étape normaliser à 1 le plus grand des deux nombres, et on passe ainsi de b à la partie fractionnaire de $1/b$, ce qui est la fonction associée à l'algorithme des fractions continues. Puisque le flot g_t dilate les longueurs, on peut utiliser un temps convenable du flot pour réaliser cette normalisation. La suite de cet article est consacrée à rendre rigoureux le raisonnement qui précède, et à en tirer quelques conséquences. Une façon beaucoup plus lourde d'énoncer les résultats qui précèdent consiste à voir

l'espace $SL(2, \mathbf{Z}) \backslash SL(2, \mathbf{R})$ comme espace modulaire du tore, et le flot g_t comme flot de Teichmüller sur cet espace; ce point de vue, inutile ici, permet d'étudier le flot de Teichmüller sur l'espace modulaire d'une surface quelconque, en codant par des «rectangles cousus», généralisations de notre domaine fondamental en L. Cette étude a été faite par Veech [Ve2], et l'on peut considérer le présent article comme un exposé du cas le plus simple de cette construction ([Ve1], p. 1391, où on étudie aussi le flot horocyclique).

Dans la première section, nous rappelons ce que nous aurons besoin de savoir sur les fractions continues; dans la deuxième section, nous définissons le flot géodésique sur la surface modulaire, et nous en donnons un autre modèle dans la troisième section. Dans la quatrième, nous définissons de manière élémentaire un système de coordonnées global sur le fibré unitaire tangent à la surface modulaire, et dans la cinquième section, nous montrons que le flot géodésique admet une section sur laquelle l'application de premier retour est un revêtement double de l'extension naturelle de la transformation des fractions continues. Dans la sixième section, nous donnons, comme exemple d'application de cette méthode, une démonstration géométrique d'un théorème de Paul Lévy sur la croissance des dénominateurs des convergents pour presque tout nombre, en utilisant l'ergodicité du flot géodésique. Dans la dernière section, nous montrons comment, en changeant la section choisie pour le flot géodésique, on peut retrouver l'algorithme additif des fractions continues; on pourrait ainsi trouver, avec d'autres sections, une infinité d'algorithmes du même type.

1. LA TRANSFORMATION DES FRACTIONS CONTINUES

Il est classique que tout réel $x \in]0, 1[$ s'écrit de façon unique

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

où la suite (a_n) est une suite d'entiers strictement positifs, finie et se terminant par un entier strictement plus grand que 1 si x est rationnel, infinie sinon. On note habituellement cette égalité $x = [0; a_1, \dots, a_n, \dots]$; dans le cas particulier où la suite est périodique, on note $x = [0; \overline{a_1, \dots, a_n}]$. Un calcul immédiat montre que $a_1 = [1/x]$, où $[t]$ est la partie entière de t , et que, si