**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 40 (1994)

**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES RÉSEAUX DANS LES GROUPES SEMI-SIMPLES NE SONT PAS INTÉRIEUREMENT MOYENNABLES

**Autor:** de la Harpe, Pierre / Skandalis, Georges

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-61115

L'Enseignement Mathématique, t. 40 (1994), p. 291-311

# LES RÉSEAUX DANS LES GROUPES SEMI-SIMPLES NE SONT PAS INTÉRIEUREMENT MOYENNABLES

par Pierre DE LA HARPE et Georges SKANDALIS

ABSTRACT. We show that any lattice in a semi-simple connected real Lie group $G$ with trivial center and without compact factor is a group which is not inner amenable. The results carry over to lattices in groups defined over local fields of characteristic zero, and to some other cases.

RÉSUMÉ. On montre que tout réseau dans un groupe de Lie réel $G$ connexe semi-simple de centre trivial et sans facteur compact est un groupe non intérieurement moyennable. Les résultats s'étendent aux réseaux dans les groupes définis sur des corps locaux de caractéristique nulle, ainsi qu'à quelques autres cas.

## 1. INTRODUCTION

Le premier objet de ce travail est d'obtenir le résultat suivant. Rappelons qu'un *réseau* d'un groupe localement compact $G$ est un sous-groupe discret $\Gamma$ de $G$ tel qu'il existe sur $\Gamma \backslash G$ une mesure de probabilité $G$-invariante. La notion de moyennabilité intérieure est rappelée au chapitre 2 ci-dessous.

PROPOSITION 1. *Soit $G$ un groupe de Lie réel connexe, semi-simple, de centre réduit à un élément, et sans facteur compact. Alors tout réseau $\Gamma$ de $G$ est non intérieurement moyennable.*

Notons que ce résultat était déjà connu quand $G$ est de plus supposé simple: lorsque $G$ est de rang réel 1, voir [HaJ] pour le cas où $\Gamma$ est sans torsion et [GiH] pour le cas général; lorsque $G$ a la propriété (T) de Kazhdan, voir [BeH].

---

*Keywords:* Groupes intérieurement moyennables, réseaux, groupes semi-simples.
1980 Mathematics subject classifications: 22 D 10, 22 E 40.

La proposition 1 est une conséquence presque immédiate du résultat plus technique ci-dessous. Dans un groupe $G$, on note $e$ l'élément neutre et $Z(x, G)$ le centralisateur d'un élément $x \in G$.

THÉORÈME A. *On considère des groupes localement compacts* $G_H$, $G_T$ *et un réseau*

$$\Gamma \subset G = G_H \times G_T$$

*ayant les propriétés suivantes.*

*(a) Le groupe* $G_H$ *agit par homéomorphismes sur un espace compact* $\Omega$ *et il n'existe aucune mesure de probabilité* $G_H$*-invariante sur* $\Omega$. *De plus, pour tout* $x \in G_H$ *tel que* $x^{\mathbf{Z}}$ *ne soit pas relativement compact dans* $G_H$, *il existe une mesure de probabilité* $Z(x, G_H)$*-invariante sur* $\Omega$.

*(b) Le groupe* $G_T$ *possède la propriété (T) de Kazhdan. De plus, pour tout* $x \in G_T - \{e\}$, *le centralisateur* $Z(x, G_T)$ *n'est pas de covolume fini dans* $G_T$.

*(c) Le groupe* $\Gamma \cap (G_H \times \{e\})$ *est sans torsion.*

*Alors* $\Gamma$ *n'est pas intérieurement moyennable.*

Pour appliquer ce théorème, considérons un ensemble fini non vide $A$ ainsi que, pour tout $\alpha \in A$, un corps local $\mathbf{k}_\alpha$ et un groupe algébrique affine $\mathbf{G}_\alpha$ défini sur $\mathbf{k}_\alpha$; on suppose $\mathbf{G}_\alpha$ connexe, simple, $\mathbf{k}_\alpha$-isotrope, et de centre réduit à $\{e\}$. On note $G_\alpha$ le groupe des points $\mathbf{k}_\alpha$-rationnels de $\mathbf{G}_\alpha$, qui est non compact [Mar, §I.2.3], et $G$ le produit direct $\prod_{\alpha \in A} G_\alpha$.

On peut décomposer $G$ en le produit $G_H$ des facteurs de rang déployé un (l'indice $H$ indique que ces facteurs, au moins lorsque $\mathbf{k}_\alpha = \mathbf{R}$, agissent sur des espaces hyperboliques) fois le produit $G_T$ des autres facteurs (l'indice $T$ indique que $G_T$ possède la propriété de Kazhdan). Les hypothèses du théorème A sont alors satisfaites (voir le chapitre 4 ci-dessous) et on obtient le résultat suivant.

PROPOSITION 2. *Soit* $G$ *comme ci-dessus et soit* $\Gamma_0$ *un réseau de* $G$ *qui est sans torsion. Alors* $\Gamma_0$ *est non intérieurement moyennable.*

Si $\mathbf{k}_\alpha = \mathbf{R}$ pour tout $\alpha \in A$, les composantes connexes des groupes $G$ de la proposition 2 coïncident précisément avec les groupes $G$ de la proposition 1. (Voir par exemple [Zim, 3.1.6].)

On trouve au chapitre 4 une généralisation de la proposition 2.

COROLLAIRE. *Soit $G$ comme à la proposition 2; on suppose de plus les corps $\mathbf{k}_\alpha$ de caractéristique nulle. Alors tout réseau $\Gamma$ de $G$ est non intérieurement moyennable.*

*Preuve.* Les hypothèses du corollaire impliquent que $\Gamma$ est de type fini; voir [Mar, Theorem IX.3.2.i et Remark (i) du n° IX.1.2]; si $\mathbf{k}_\alpha = \mathbf{R}$ pour tout $\alpha \in A$, voir aussi [Ra1, Remarks 6.18 et 13.21]. Or, en caractéristique nulle, le groupe linéaire de type fini $\Gamma$ possède nécessairement un sous-groupe $\Gamma_0$ d'indice fini qui est sans torsion [Sel]. Il en résulte que $\Gamma_0$ n'est pas intérieurement moyennable (proposition 2), et $\Gamma$ non plus (proposition 4 ou [GiH]). □

En présence de corps de caractéristiques non nulles, notons d'abord qu'il existe des réseaux qui ne sont pas de type fini: c'est par exemple le cas de $\Gamma = SL(2, \mathbf{F}_q[t])$ dans $G = SL(2, \mathbf{F}_q((t)))$, et plus généralement de tout réseau *non cocompact* dans un groupe $G$ de rang un sur un corps $\mathbf{F}_q((t))$ (voir [Lu1] et [Lu2]). Notons aussi que le «lemme de Selberg» invoqué dans la preuve du corollaire ne s'applique pas: par exemple, pour tout sous-groupe $\Gamma_0$ d'indice fini dans $\Gamma = SL(2, \mathbf{F}_q[t])$, le volume de $G/\Gamma_0$ est égal à une série infinie convergente de la forme

$$\mu(G/\Gamma_0) = \sum_{x \in F} \frac{1}{\operatorname{cardinal}(\Gamma_x)} < \infty$$

où les $\Gamma_x$ sont certains sous-groupes finis de $\Gamma_0$ [Ser, II.1.5], de sorte que $\Gamma_0$ a toujours de la torsion.

Toutefois, étant donné un réseau $\Gamma$ d'un groupe $G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ comme à la proposition 2, on peut encore montrer que $\Gamma$ est non intérieurement moyennable dans certains cas, comme (1) et (2) ci-dessous. Rappelons d'abord que $\Gamma$ est produit direct de réseaux irréductibles, et qu'un tel produit est non intérieurement moyennable si et seulement s'il en est de même de chaque facteur [BeH, Corollaire 3]. Il résulte donc de [Mar, Corollary IX.4.4] qu'on ne restreint pas la généralité de ce qui suit en supposant que les corps $\mathbf{k}_\alpha$ ont tous la même caractéristique; vu le corollaire précédent, on suppose cette caractéristique non nulle. Ceci dit, on a les résultats suivants.

(1) Si tous les $G_\alpha$ sont de rang déployé au moins 2, alors le réseau $\Gamma$ a la propriété (T) de Kazhdan, et n'est donc pas intérieurement moyennable.

(2) Si $A = \{\alpha\}$ est réduit à un élément, si $\mathbf{k}_\alpha = \mathbf{F}_q((t))$ et si $G_\alpha$ est de rang déployé un, alors le réseau $\Gamma$ possède un sous-groupe $\Gamma_0$ d'indice fini qui est un produit libre non banal (voir [Lu1] et [Lu2]), donc $\Gamma_0$ n'est pas intérieurement moyennable [BeH], et $\Gamma$ non plus (proposition 4 ci-après).

Mais nous n'avons pas su éliminer en toute généralité l'hypothèse sur les caractéristiques dans le corollaire ci-dessus.

Si $G$ est comme dans la proposition 2 ou son corollaire, les méthodes utilisées pour montrer la non moyennabilité intérieure de $\Gamma$ s'appliquent à d'autres sous-groupes qu'à des réseaux. Pour illustrer ces généralisations sans trop alourdir notre rédaction, nous montrons au chapitre 4 un théorème B, qui est un raffinement du théorème A ci-dessus, et qui implique le résultat suivant. Sur un corps local $\mathbf{k}$, on considère toujours la valeur absolue $x \mapsto |x|$ associant à $x$ le module (au sens de la théorie de la mesure de Haar) de l'automorphisme $y \mapsto xy$ du groupe additif de $\mathbf{k}$. Dans la proposition qui suit, on ne fait aucune hypothèse sur la caractéristique de $\mathbf{k}$.

PROPOSITION 3. *On considère un entier* $d \geqslant 2$, *un corps local* $\mathbf{k}$ *et un sous-groupe* $S$ *du groupe* $G = \mathrm{PGL}(d, \mathbf{k})$. *De plus,*

*si* $d = 2$ *on suppose que* $S$ *ne contient pas de sous-groupe résoluble d'indice fini, et qu'il existe dans* $S$ *un élément représenté par une matrice de valeurs propres* $\lambda_\alpha, \lambda_\omega$ *telles que* $|\lambda_\alpha| < |\lambda_\omega|$,

*si* $d \geqslant 3$ *on suppose que* $S$ *contient un réseau de* $G$.

*Alors* $S$ *est non intérieurement moyennable.*

*Par exemple, pour tout* $d \geqslant 2$, *le groupe* $PSL(d, \mathbf{Q})$ *n'est pas intérieurement moyennable.*

Si $\Gamma$ [respectivement $S$] est un groupe comme dans l'un des résultats précédents, la non moyennabilité intérieure de ce groupe implique que son *algèbre de von Neumann* est un *facteur plein.* (Ceci grâce à un résultat dû à Effros [Efr]; voir aussi l'observation (1) à la fin du §1 de [BeH].)

Pour montrer ces résultats, on utilise des propriétés élémentaires (relatives à la contenance faible) de l'induction des représentations unitaires. Avant la preuve, nous rappelons quelques-unes des notions en jeu. On utilise enfin (dans la preuve du corollaire) le résultat suivant. Il généralise le théorème 1 de [GiH] en ceci que $\Gamma$ n'est pas nécessairement supposé être de type fini.

PROPOSITION 4. *Soient* $\Gamma$ *un groupe et* $\Gamma_0$ *un sous-groupe d'indice fini. On suppose que* $\Gamma$ *est intérieurement moyennable et cci (c'est-à-dire que ses classes de conjugaison autres que* $\{e\}$ *sont toutes infinies). Alors* $\Gamma_0$ *est aussi intérieurement moyennable.*

## 2. Rappels et preuve de la proposition 4

Soit $G$ un groupe localement compact, avec élément unité noté $e$. Dans la suite, on entend par «**représentation**» de $G$ une «représentation unitaire continue dans un espace de Hilbert complexe». On désigne par $1_G$ la représentation unité de $G$ dans l'espace de dimension 1.

Soit $H$ un sous-groupe fermé de $G$. Pour toute représentation $\pi$ de $H$, on désigne par $Ind_H^G(\pi)$ la représentation de $G$ induite de $\pi$. (Voir ci-dessous les rappels dans la preuve du lemme 4.) Lorsque $\pi = 1_H$, on obtient la représentation quasi-régulière de $G$ associée à l'espace homogène $H\backslash G$; si de plus $H = \{e\}$, on obtient la représentation régulière droite de $G$, notée $\rho_G$. Si $\pi$ et $\pi'$ sont deux représentations de $G$, la notation $\pi \prec \pi'$ (respectivement $\pi \sim \pi'$) indique que la représentation $\pi$ est faiblement contenue dans $\pi'$ (resp. est faiblement équivalente à $\pi'$); pour ces notions, voir [Dix].

Le groupe $G$ est dit **moyennable** si $1_G \prec \rho_G$; il y a de nombreuses autres définitions équivalentes (voir par exemple [Gre] et [Eym]). Un groupe de Lie réel connexe semi-simple est moyennable si et seulement s'il est compact: c'est un résultat qui remonte à Furstenberg [Fur].

Considérons plus particulièrement le cas d'un groupe discret, noté $\Gamma$. Si $X$ est une partie de $\Gamma$ invariante par conjugaison, on introduit l'espace $l^2(X)$ des fonctions $\Gamma \to \mathbf{C}$ de carré sommable à supports dans $X$ et la représentation $\alpha_{\Gamma,X}$ de $\Gamma$ dans $l^2(X)$ définie par

$$(\alpha_{\Gamma,X}(\gamma)\xi)(x) = \xi(\gamma^{-1}x\gamma)$$

pour tous $\gamma \in \Gamma$, $\xi \in l^2(X)$ et $x \in X$. Lorsque $X = \Gamma - \{e\}$, on écrit simplement $\alpha_\Gamma$. Le groupe $\Gamma$ est dit **intérieurement moyennable** si $1_\Gamma \prec \alpha_\Gamma$. Il y a plusieurs autres définitions de cette notion [BeH], mais il faut de plus noter que certains auteurs utilisent les mêmes mots pour une notion *distincte* [Pat, page 84].

Rappelons deux des conditions standard suffisantes pour qu'un groupe $\Gamma$ soit intérieurement moyennable. La première est qu'il possède une classe de conjugaison finie et distincte de $\{e\}$, c'est-à-dire que $\alpha_\Gamma$ contienne la représentation unité $1_\Gamma$ au sens fort. La seconde est que $\Gamma$ soit moyennable et non réduit à $\{e\}$. (L'argument usuel apparaît dans [Gre, Lemma 1.1.3]; une variante apparaît ci-dessous après le lemme 4.)

Il existe par ailleurs des groupes intérieurement moyennables non moyennables: c'est le cas d'un produit direct $\Gamma_0 \times \Gamma_1$ lorsque $\Gamma_0$ est non moyennable et lorsque $\Gamma_1$ est moyennable non réduit à un élément.

Toutefois, de nombreux «exemples naturels» de groupes non moyennables sont aussi non intérieurement moyennables, et les résultats de la présente note fournissent des illustrations supplémentaires de ce fait.

Soit $\Gamma_0$ un sous-groupe d'indice fini d'un groupe $\Gamma$ intérieurement moyennable. Il se peut que $\Gamma_0$ ne soit *pas* intérieurement moyennable (exemple: $\Gamma = \Gamma_0 \times \Gamma_1$ avec $\Gamma_1$ fini non réduit à un élément). Toutefois, lorsque $\Gamma$ est de plus cci (ou, en toutes lettres, à classes de conjugaison infinies), on a les lemmes suivants, desquels découle la moyennabilité intérieure de $\Gamma_0$ (proposition 4).

Introduisons d'abord quelques notations. On désigne par $l^1(\Gamma)$ l'algèbre de convolution des fonctions sommables de $\Gamma$ dans $\mathbf{C}$, qui est une algèbre de Banach pour la norme définie par $\| \xi \|_1 = \sum_{\gamma \in \Gamma} | \xi(\gamma) |$. Comme $\Gamma$ est discret, tout élément $\xi \in l^1(\Gamma)$ possède aussi des normes $\| \xi \|_2 = (\sum_{\gamma \in \Gamma} | \xi(\gamma) |^2)^{1/2}$ et $\| \xi \|_\infty = \sup_{\gamma \in \Gamma} | \xi(\gamma) |$ qui sont finies. Pour $\xi \in l^1(\Gamma)$ et $\gamma \in \Gamma$, on définit l'adjoint $\xi^* \in l^1(\Gamma)$ et l'opérateur $\alpha(\gamma)$ sur $l^1(\Gamma)$ par

$$\xi^*(x) = \overline{\xi(x^{-1})}$$
$$(\alpha(\gamma)\xi)(x) = \xi(\gamma^{-1}x\gamma)$$

pour tout $x \in \Gamma$. On désigne par $l^1(\Gamma)^+_{0,1}$ le convexe de $l^1(\Gamma)$ formé des fonctions $\xi$ à valeurs positives, telles que $\xi(e) = 0$, et de norme $\| \xi \|_1 = 1$.

La moyennabilité intérieure de $\Gamma$ se traduit [BeH] par l'existence d'une suite $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ dans $l^1(\Gamma)^+_{0,1}$ qui est asymptotiquement invariante au sens où

$$\lim_{n \to \infty} \| \alpha(\gamma)\xi_n - \xi_n \|_1 = 0$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$.

LEMME 1. *Si $\Gamma$ est intérieurement moyennable et cci, il existe une suite asymptotiquement invariante $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ dans $l^1(\Gamma)^+_{0,1}$ ayant les propriétés suivantes:*

*(i)* $\xi_n$ *est à support fini pour tout* $n \geqslant 1$,

*(ii)* $\lim_{n \to \infty} \| \xi_n \|_\infty = 0$,

*(iii)* $\lim_{n \to \infty} \| \xi_n \|_2 = 0$.

*Preuve.* Soit $(\xi_k'')_{k \geqslant 1}$ une suite asymptotiquement invariante de $l^1(\Gamma)^+_{0,1}$.

*Premier pas.* Montrons d'abord que, pour tout $x \in \Gamma$ on a $\lim_{k \to \infty} \xi_k''(x) = 0$.

Pour cela, choisissons un entier $c \geqslant 2$. On peut trouver $\gamma_1, \ldots, \gamma_c \in \Gamma$ tels que les éléments $\gamma_1^{-1} x \gamma_1, \ldots, \gamma_c^{-1} x \gamma_c$ sont distincts deux à deux. Il existe aussi un entier $k_0$ assez grand pour que $\| \alpha(\gamma_j) \xi_k'' - \xi_k'' \|_1 \leqslant c^{-1}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, c\}$ et pour tout $k \geqslant k_0$. Par suite $\xi_k''(\gamma_j^{-1} x \gamma_j) \geqslant \xi_k''(x) - c^{-1}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, c\}$, donc $1 = \| \xi_k'' \|_1 \geqslant c \xi_k''(x) - 1$ et $\xi_k''(x) \leqslant 2c^{-1}$ pour tout $k \geqslant k_0$. L'entier $c$ étant arbitraire, la suite $(\xi_k''(x))_{k \geqslant 1}$ tend bien vers 0.

*Deuxième pas.* Le sous-ensemble de $l^1(\Gamma)_{0,1}^+$ formé des fonctions à supports finis est dense dans $l^1(\Gamma)_{0,1}^+$. On ne restreint donc pas la généralité de ce qui suit en supposant *a priori* les fonctions $\xi_k''$ à supports finis. Soit alors $(k_n)_{n \geqslant 1}$ une suite strictement croissante d'entiers strictement positifs. Pour tout $n \geqslant 1$ on pose

$$S_n = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant n} \text{support}\,(\xi_{k_j}'') \subset \Gamma$$

(c'est une partie finie de $\Gamma$) et on note $\chi_n$ la fonction caractéristique de $S_n$.

Montrons que, pour un choix convenable de $(k_n)_{n \geqslant 1}$, on peut définir une suite asymptotique invariante $(\xi_n')_{n \geqslant 1}$ de $l^1(\Gamma)_{0,1}^+$ de $n$-ième terme

$$\xi_n' = (\xi_{k_n}'' - \xi_{k_n}'' \chi_{n-1}) \| \xi_{k_n}'' - \xi_{k_n}'' \chi_{n-1} \|_1^{-1}$$

(avec $\chi_0 = 0$) de telle sorte que les supports des $\xi_n'$ sont alors finis et *disjoints deux à deux.*

On pose $k_1 = 1$, donc $\xi_1' = \xi_1''$, puis on procède par récurrence sur $n$ en supposant $\xi_1', \ldots, \xi_{n-1}'$ déjà définis. Par le premier pas, on a

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{x \in S_{n-1}} \xi_k''(x) = 0 .$$

On peut choisir $k_n > k_{n-1}$ tel que

$$\sum_{x \in S_{n-1}} \xi_{k_n}''(x) \leqslant \frac{1}{n},$$

c'est-à-dire tel que $\| \xi_{k_n}'' - \xi_{k_n}'' \chi_{n-1} \|_1 \geqslant \frac{n-1}{n}$. La définition ci-dessus de $\xi_n'$ a donc un sens, et la suite $(\xi_n')_{n \geqslant 1}$ a évidemment les propriétés annoncées.

*Troisième pas.* Soit $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie à la Cesàro par

$$\xi_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j' .$$

Cette suite satisfait évidemment les conditions (i) et (ii) du lemme (on a même $\| \xi_n \|_\infty \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$). Comme $\| \xi \|_2^2 \leqslant \| \xi \|_1 \| \xi \|_\infty$ pour tout $\xi \in l^1(\Gamma)$, elle satisfait aussi la condition (iii). □

LEMME 2. *Soit* $\Gamma$ *un groupe intérieurement moyennable et cci, et soit* $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ *une suite asymptotiquement invariante de* $l^1(\Gamma)^+_{0,1}$ *possédant les propriétés du lemme 1. Soit* $(\eta_n)_{n \geqslant 1}$ *la suite définie par* $\eta_n = \xi_n^* \star \xi_n$ *et soit* $\Gamma_0$ *un sous-groupe de* $\Gamma$ *d'indice* $f = [\Gamma : \Gamma_0]$ *fini. Alors*

$$\liminf_{n \to \infty} \sum_{\gamma \in \Gamma_0 - \{e\}} \eta_n(\gamma) \geqslant \frac{1}{f}$$

*Preuve.* Désignons par $\chi_s : \Gamma \to \{0, 1\}$ la fonction caractéristique d'une classe à gauche $s \in \Gamma/\Gamma_0$. Posons

$$T = \{(x, y) \in \Gamma \times \Gamma \mid x^{-1}y \in \Gamma_0\} = \coprod_{s \in \Gamma/\Gamma_0} (s\Gamma_0 \times s\Gamma_0)$$

où $\coprod$ désigne une réunion disjointe. Pour tout $n \geqslant 1$ on note $\eta_n'$ la restriction de $\eta_n$ à $\Gamma_0$. On a

$$\begin{aligned} \|\eta_n'\|_1 &= \sum_{(x,y) \in T} \xi_n(x)\xi_n(y) = \sum_{s \in \Gamma/\Gamma_0} \sum_{x \in \Gamma, y \in \Gamma} (\xi_n\chi_s)(x)(\xi_n\chi_s)(y) \\ &= \sum_{s \in \Gamma/\Gamma_0} (\|\xi_n\chi_s\|_1)^2 \end{aligned}$$

ainsi que

$$1 = \|\xi_n\|_1 = \sum_{s \in \Gamma/\Gamma_0} \|\xi_n\chi_s\|_1 \leqslant \left(\sum_{s \in \Gamma/\Gamma_0} (\|\xi_n\chi_s\|_1)^2\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{f} = (\|\eta_n'\|_1 f)^{\frac{1}{2}}$$

(on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la somme sur $\Gamma/\Gamma_0$). Par suite

$$\|\eta_n'\|_1 \geqslant \frac{1}{f}$$

pour tout $n \geqslant 1$. Par ailleurs, il résulte du lemme 1 que $\eta_n(e) = \|\xi_n\|_2^2$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini. La conclusion du lemme 2 en résulte. □

Notons que les lemmes 1 et 2 ci-dessus sont des raffinements des lemmes 3 et 4 de [GiH].

Dans la situation du lemme 2, posons de plus

$$\zeta_n = \eta_n - \eta_n(e)\delta$$

pour tout $n \geqslant 1$, où $\delta$ désigne la fonction caractéristique de $\{e\}$ dans $\Gamma$. Notons $\zeta_n'$ la restriction de $\zeta_n$ à $\Gamma_0$ et $\|\zeta_n'\|$ sa norme dans $l^1(\Gamma_0)$. Le lemme 2 se reformule en les inégalités $\| \zeta_n' \| \geqslant f^{-1}$, et on peut définir une suite asymptotiquement invariante $(\zeta_n' \| \zeta_n' \|^{-1})_{n \geqslant 1}$ dans $l^1(\Gamma_0)^+_{0,1}$. Il en résulte que $\Gamma_0$ est intérieurement moyennable, ce qui achève la preuve de la proposition 4.

## 3. Lemmes préliminaires

Soit d'abord $\Gamma$ un groupe discret. Notons $Conj'(\Gamma)$ l'ensemble des classes de conjugaison de $\Gamma$ distinctes de $\{e\}$. Avec les notations du début du chapitre précédent, on a

$$\alpha_\Gamma = \bigoplus_{C \in Conj'(\Gamma)} \alpha_{\Gamma, C}$$

où $\oplus$ désigne une somme orthogonale. Pour tout $C \in Conj'(\Gamma)$, choisissons de plus un élément $\gamma_C \in C$; notons $\mathscr{C}_\Gamma = \{\gamma_C\}_{C \in Conj'(\Gamma)}$ le sous-ensemble de $\Gamma$ ainsi spécifié. Pour tout $C \in Conj'(\Gamma)$, la classe $C$ s'identifie à l'espace homogène $Z(\gamma_C, \Gamma) \backslash \Gamma$ et on a

$$\alpha_{\Gamma, C} \approx Ind_{Z(\gamma_C, \Gamma)}^{\Gamma} (1_{Z(\gamma_C, \Gamma)})$$

où $Z(\gamma_C, \Gamma)$ désigne le centralisateur de $\gamma_C$ dans $\Gamma$ et où $\approx$ indique l'équivalence unitaire des représentations. On a donc

$$\alpha_\Gamma \approx \bigoplus_{\gamma \in \mathscr{C}_\Gamma} Ind_{Z(\gamma, \Gamma)}^{\Gamma} (1_{Z(\gamma, \Gamma)}) .$$

Lemme 3. *Soit $\Gamma$ un réseau dans un groupe localement compact $G$. Si $\Gamma$ est intérieurement moyennable, on a*

$$1_G \prec \bigoplus_{\gamma \in \mathscr{C}_\Gamma} Ind_{Z(\gamma, G)}^{G} (1_{Z(\gamma, G)}) .$$

*Preuve.* Par hypothèse, on a

$$1_\Gamma \prec \bigoplus_{\gamma \in \mathscr{C}_\Gamma} Ind_{Z(\gamma, \Gamma)}^{\Gamma} (1_{Z(\gamma, \Gamma)}) .$$

En induisant à $G$ on obtient

$$Ind_\Gamma^G (1_\Gamma) \prec \bigoplus_{\gamma \in \mathscr{C}_\Gamma} Ind_{Z(\gamma, \Gamma)}^{G} (1_{Z(\gamma, \Gamma)}) .$$

Par ailleurs, $1_G$ est une sous-représentation de $Ind_\Gamma^G(1_\Gamma)$, car $\Gamma$ est un réseau dans $G$. La conclusion résulte donc de l'assertion (ii) du lemme suivant. □

Le lemme qui suit est essentiellement le «principe de majoration de Herz» [EyL].

LEMME 4. *Soient* $\{H_j\}_{j\in J}$ *et* $\{H'_j\}_{j\in J}$ *deux familles de sous-groupes fermés d'un groupe localement compact* $G$ *telles que* $H'_j \subset H_j$ *pour tout* $j \in J$.

*(i) S'il existe pour tout* $j \in J$ *une représentation unitaire* $\pi_j$ *de* $H_j$ *telle que* $1_G \prec \oplus_{j\in J} Ind_{H_j}^G(\pi_j)$, *alors* $1_G \prec \oplus_{j\in J} Ind_{H_j}^G(1_{H_j})$.

*(ii) Si* $1_G \prec \oplus_{j\in J} Ind_{H'_j}^G(1_{H'_j})$, *alors* $1_G \prec \oplus_{j\in J} Ind_{H_j}^G(1_{H_j})$.

*Preuve.* (a) Précisons le modèle considéré ici pour les représentations induites en rappelant ceci. On considère d'abord un sous-groupe fermé $H$ de $G$ et une représentation $\pi$ de $H$ dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}_\pi$.

On choisit une mesure $\mu$ sur l'espace homogène $H\backslash G$ dont la classe est invariante par l'action à droite de $G$. (On peut par exemple prendre l'image par la projection canonique $G \to H\backslash G$ d'une mesure de probabilité sur $G$ dans la classe de la mesure de Haar.) Pour tout $g \in G$, on a donc une dérivée de Radon-Nikodym décrite par l'application

$$\Delta : \begin{cases} (H\backslash G) \times G & \to \mathbf{R}_+ \\ (s, g) & \mapsto \frac{d\mu(s^g)}{d\mu(s)} \end{cases}$$

satisfaisant l'identité de cocycle $\Delta(s, gg') = \Delta(s, g)\Delta(s^g, g')$.

On introduit l'espace vectoriel $L^2(G, \mathscr{H}_\pi)^H$ des applications mesurables $\xi : G \to \mathscr{H}_\pi$ (modulo l'égalité presque partout) qui sont $H$-équivariantes, c'est-à-dire telles que

$$\xi(h^{-1}x) = \pi(h)\xi(x) \text{ pour tout } h \in H \text{ et presque tout } x \in G$$

et de carré sommable au sens où

$$\int_{H\backslash G} \|\xi(\dot{x})\|^2 d\mu(\dot{x}) < \infty\ ;$$

comme $\|\xi(x)\|^2$ ne dépend que de la classe $\dot{x} = Hx$ de $x$, on a commis l'abus d'écrire ce nombre $\|\xi(\dot{x})\|^2$. L'espace $L^2(G, \mathscr{H}_\pi)^H$ est muni d'un produit scalaire défini par

$$<\xi \mid \xi'> = \int_{H\backslash G} <\xi(\dot{x}) \mid \xi'(\dot{x})> d\mu(\dot{x})$$

qui en fait un espace de Hilbert.

On définit la représentation $\tilde{\pi} = Ind_H^G(\pi)$ de $G$ dans $L^2(G, \mathscr{H}_\pi)^H$ par

$$(\tilde{\pi}(g)\xi)(x) = \xi(xg)\Delta(\dot{x}, g)^{1/2}$$

pour tous $g \in G$, $\xi \in L^2(G, \mathscr{H}_\pi)^H$ et $x \in G$ (avec $\dot{x} = Hx \in H\backslash G$). On vérifie que $\tilde{\pi}$ est bien une représentation de $G$, car $\Delta$ est un cocycle, et qu'elle est bien unitaire, car (en posant $y = \dot{x}^g$)

$$\begin{aligned}
\| \tilde{\pi}(g)\xi \|^2 &= \int_{H\backslash G} \| \xi(\dot{x}^g) \|^2 \Delta(\dot{x}, g)\, d\mu(\dot{x}) \\
&= \int_{H\backslash G} \| \xi(\dot{y}) \|^2 \Delta(\dot{y}^{g^{-1}}, g)\, \Delta(\dot{y}, g^{-1})\, d\mu(\dot{y}) \\
&= \int_{H\backslash G} \| \xi(\dot{y}) \|^2 d\mu(\dot{y}) \\
&= \| \xi \|^2
\end{aligned}$$

pour tous $g \in G$ et $\xi \in L^2(G, \mathscr{H}_\pi)^H$.

(b) Montrons d'abord l'assertion (i) du lemme lorsqu'il n'y a qu'un sous-groupe $H$ de $G$. Posons $\sigma = 1_H$ et $\tilde{\sigma} = Ind_H^G(1_H)$. L'application de composition avec la norme de $\mathscr{H}_\pi$ s'écrit

$$N : \begin{cases} L^2(G, \mathscr{H}_\pi)^H \to L^2(G, \mathscr{H}_\sigma = \mathbf{C})^H \\ \xi \quad \mapsto \quad (G \to \mathbf{C},\ x \mapsto \| \xi(x) \|)\,. \end{cases}$$

Elle est $G$-équivariante (via les représentations $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\sigma}$), lipschitzienne de rapport 1, et $\| N(\xi) \| = \| \xi \|$ pour tout $\xi \in L^2(G, \mathscr{H}_\pi)^H$.

Dire que $1_G \prec \tilde{\pi}$, c'est dire que, pour toute partie compacte $K$ de $G$ et pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\xi = \xi_{K,\varepsilon} \in L^2(G, \mathscr{H}_\pi)^H$ telle que $\| \xi \| = 1$ et telle que

$$\sup_{k \in K} \| \tilde{\pi}(k)\xi - \xi \| < \varepsilon\,.$$

Ces propriétés impliquent qu'on a aussi $\| N(\xi) \| = 1$ et

$$\sup_{k \in K} \| \tilde{\sigma}(k) N(\xi) - N(\xi) \| < \varepsilon\,.$$

Il en résulte que $1_G \prec \tilde{\sigma}$.

(c) On montre le cas général de l'assertion (i) grâce au même argument, en utilisant une application

$$N : \begin{cases} \bigoplus_{j \in J} L^2(G, \mathscr{H}_{\pi_j})^{H_j} \to \bigoplus_{j \in J} L^2(G, \mathbf{C})^{H_j} \\ (\xi_j)_{j \in J} \qquad \mapsto \qquad (N_j \xi_j)_{j \in J} \end{cases}$$

avec $N_j$ comme dans (b) pour tout $j \in J$.

(d) L'hypothèse de (ii) s'écrit aussi

$$1_G \prec \bigoplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G (Ind_{H_j'}^{H_j}(1_{H_j'}))$$

de sorte que l'assertion (ii) est un cas particulier de (i). □

*Remarque.* Pour illustrer le lemme 4, répétons l'un des arguments montrant qu'un groupe $\Gamma$ qui est moyennable et non réduit à $\{e\}$ est aussi intérieurement moyennable. Rappelons que $\Gamma$ est moyennable si et seulement si $1_\Gamma \prec \rho_\Gamma$.

Pour *toute* classe de conjugaison $C \subset \Gamma - \{e\}$, si on choisit un élément $\gamma$ de $C$, on a (avec les notations comme au chapitre 3)

$$1_\Gamma \prec \rho_\Gamma = Ind_{Z(\gamma,\Gamma)}^\Gamma \rho_{Z(\gamma,\Gamma)} .$$

Le lemme 4.i implique qu'on a aussi

$$1_\Gamma \prec Ind_{Z(\gamma,\Gamma)}^\Gamma 1_{Z(\gamma,\Gamma)} = \alpha_{\Gamma,C} .$$

On a donc a fortiori $1_\Gamma \prec \alpha_\Gamma$.

LEMME 5. *Soit $G$ un groupe localement compact qui possède la propriété (T) de Kazhdan et soit $(H_j)_{j \in J}$ une famille de sous-groupes fermés de $G$. On suppose que, pour tout $j \in J$, il n'existe aucune mesure de probabilité $G$-invariante sur l'espace homogène $H_j \backslash G$. Alors*

$$1_G \not\prec \bigoplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G (1_{H_j}) .$$

*Preuve.* Supposons par l'absurde que l'on ait $1_G \prec \oplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G (1_{H_j})$. Comme $G$ a la propriété (T), la contenance aurait lieu au sens fort. Comme la représentation $1_G$ est irréductible, il existerait $j \in J$ tel que $1_G$ soit une sous-représentation de $Ind_{H_j}^G (1_{H_j})$, c'est-à-dire que $H_j \backslash G$ possède une mesure de probabilité $G$-invariante, contrairement à l'hypothèse. □

LEMME 6. *Soit $G$ un groupe localement compact agissant continûment dans un espace compact $\Omega$ et soit $(H_j)_{j \in J}$ une famille de sous-groupes fermés de $G$. On suppose qu'il n'existe aucune mesure de probabilité $G$-invariante sur $\Omega$, et qu'il existe pour tout $j \in J$ une mesure de probabilité $H_j$-invariante $\nu_j$ sur $\Omega$. Alors*

$$1_G \not\prec \bigoplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G (1_{H_j}) .$$

*Preuve.* On convient ici que l'action de $G$ sur $\Omega$ est à droite.

Pour tout $j \in J$, on choisit une mesure de probabilité $\mu_j$ sur $H_j \backslash G$ qui est quasi-invariante par $G$ (voir la preuve du lemme 4). On introduit l'espace de Hilbert

$$\mathscr{H} = \bigoplus_{j \in J} L^2(H_j \backslash G, \mu_j)$$

de la représentation $\oplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G(1_{H_j})$ ainsi que sa sphère unité $\mathscr{H}_1$. On introduit aussi l'espace $Prob(\Omega)$ des mesures de probabilité sur $\Omega$, muni de la topologie vague; c'est naturellement un $G$-espace compact. Nous allons définir en deux temps une application

$$\begin{cases} \mathscr{H}_1 & \to & Prob(\Omega) \\ f & \mapsto & \nu_f \end{cases}$$

lipschitzienne et $G$-équivariante.

Dans un premier temps, on introduit pour tout $j \in J$ le $G$-espace $Mes_+(H_j \backslash G)$ des mesures positives finies sur $H_j \backslash G$, ainsi que l'application

$$\begin{cases} L^2(H_j \backslash G, \mu_j) & \to & Mes_+(H_j \backslash G) \\ f_j & \mapsto & \mu_{f_j} = |f_j|^2 \mu_j \end{cases}$$

qui est évidemment lipschitzienne sur les parties bornées. De plus, comme $G$ agit à gauche via $Ind_{H_j}^G(1_{H_j})$ sur $L^2(H_j \backslash G, \mu_j)$ et à droite sur $Mes_+(H_j \backslash G)$, on a (avec des notations dont nous espérons le sens évident au lecteur)

$$\begin{aligned} d\mu_{\pi(g^{-1})f_j}(\dot{x}) &= |f_j(\dot{x}^g)|^2 \Delta(\dot{x}, g) d\mu_j(\dot{x}) \\ &= |f_j(\dot{x}^g)|^2 d\mu_j(\dot{x}^g) \\ &= d((\mu_{f_j})^g)(\dot{x}) \end{aligned}$$

pour tout $g \in G$.

Dans un second temps, on introduit le sous-espace

$$\prod_{j \in J}^{1} Mes_+(H_j \backslash G) \subset \prod_{j \in J} Mes_+(H_j \backslash G)$$

formé des familles $(\lambda_j)_{j \in J}$ telles que $\sum_{j \in J} \lambda_j(H_j \backslash G) < \infty$, ainsi que l'application de convolution

$$\begin{cases} \prod_{j \in J}^{1} Mes_+(H_j \backslash G) & \to & Mes_+(\Omega) \\ (\lambda_j)_{j \in J} & \mapsto & \sum_{j \in J} \nu_j \star \lambda_j \end{cases}$$

où

$$\nu_j \star \lambda_j = \int_{H_j \backslash G} (\nu_j)^{\dot{g}} d\lambda_j(\dot{g}) .$$

Pour tout $g \in G$ de projection canonique $\dot{g} \in H_j \backslash G$, l'image $(\nu_j)^g$ par $g$ de la mesure $\nu_j$ sur $\Omega$ ne dépend que de $\dot{g}$, et nous avons noté $(\nu_j)^{\dot{g}}$ cette mesure image. Il est à nouveau évident que $(\lambda_j) \mapsto \sum \nu_j \star \lambda_j$ est une application lipschitzienne, et qu'elle est $G$-équivariante pour les actions à droite naturelles de $G$ à la source et au but.

On obtient par composition l'application $\mathscr{H}_1 \to Prob(\Omega)$ annoncée, qui applique un vecteur unité $f = (f_j)_{j \in J}$ sur la mesure de probabilité

$$\nu_f = \sum_{j \in J} \int_{H_j \backslash G} (\nu_j)^{\dot{g}} \, |f_j(\dot{g})|^2 d\mu_j(\dot{g}) \, .$$

Supposons alors qu'on ait

$$1_G \prec \bigoplus_{j \in J} Ind_{H_j}^G (1_{H_j}) \, .$$

Il existerait dans $\mathscr{H}_1$ une suite de vecteurs

$$(f_n)_{n \geqslant 1} = ((f_{j,n})_{j \in J})_{n \geqslant 1}$$

asymptotiquement $G$-invariante au sens où

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{k \in K} \sum_{j \in J} \| Ind_{H_j}^G (1_{H_j}) \, (k^{-1}) \, (f_{j,n}) - f_{j,n} \|^2 = 0$$

pour toute partie compacte $K$ de $G$. Il en résulterait que la suite correspondante $(\nu_{f_n})_{n \geqslant 1}$ de $Prob(\Omega)$ serait aussi asymptotiquement invariante au sens où

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{k \in K} \| (\nu_{f_n})^k - \nu_{f_n} \| = 0$$

pour toute partie compacte $K$ de $G$. Quitte à passer à une suite extraite, on obtiendrait à la limite une mesure de probabilité $G$-invariante sur $\Omega$, en contradiction avec les hypothèses du lemme. L'hypothèse de contenance faible ci-dessus est donc impossible, et la preuve est achevée. □

## 4. Preuve des résultats de l'introduction

Enonçons d'abord le raffinement suivant du théorème A.

THÉORÈME B. *On considère des groupes localement compacts* $G_H$, $G_T$ *un réseau*

$$\Gamma \subset G = G_H \times G_T$$

*et un sous-groupe* $S$ *de* $G$ *contenant* $\Gamma$, *ayant les propriétés suivantes.*

*(a) Le groupe* $G_H$ *agit par homéomorphismes sur un espace compact* $\Omega$ *et il n'existe aucune mesure de probabillité* $G_H$*-invariante sur* $\Omega$. *De plus, pour tout* $x \in G_H - \{e\}$ *tel que* $(x, e) \in S$, *il existe une mesure de probabilité* $Z(x, G_H)$*-invariante sur* $\Omega$.

*(b) Le groupe* $G_T$ *possède la propriété (T) de Kazhdan. De plus, pour tout* $x \in G_T - \{e\}$, *le centralisateur* $Z(x, G_T)$ *n'est pas de covolume fini dans* $G_T$.

*Alors* $S$ *n'est pas intérieurement moyennable.*

*Preuve.* Notons $\beta_\Gamma$ la restriction à $\Gamma$ de la représentation $\alpha_S$ définie au chapitre 2. Soit $\Sigma$ un système de représentants des orbites de l'action de $\Gamma$ sur $S - \{e\}$ par $(\gamma, s) \mapsto \gamma s \gamma^{-1}$. On a

$$\beta_\Gamma = \bigoplus_{s \in \Sigma} Ind_{Z(s,\Gamma)}^{\Gamma}(1_{Z(s,\Gamma)}) .$$

Si $S$ était intérieurement moyennable, on aurait $1_S \prec \alpha_S$, donc $1_\Gamma \prec \beta_\Gamma$ par restriction à $\Gamma$. Il suffit donc de supposer que $1_\Gamma \prec \beta_\Gamma$ et de montrer qu'on obtient une contradiction.

Si on avait $1_\Gamma \prec \beta_\Gamma$, on aurait par induction de $\Gamma$ à $G$ (comme au lemme 4) la relation

$$(\star) \qquad 1_G \prec \bigoplus_{s \in \Sigma} Ind_{Z(s,G)}^{G}(1_{Z(s,G)}) .$$

Pour tout $s \in \Sigma$, écrivons

$$s = (s_H, s_T) \in \Sigma \subset S \subset G = G_H \times G_T .$$

Posons

$$\Sigma^H = \Sigma \cap (G_H \times \{e\})$$

ainsi que

$$\Sigma^T = \Sigma - \Sigma^H .$$

Le membre de droite de la relation $(\star)$ se décompose naturellement en une somme de deux termes, chacun étant lui-même une somme sur l'un des ensembles $\Sigma^H$, $\Sigma^T$. Or une relation de contenance faible de la forme $1_\Gamma \prec \oplus_{1 \leqslant n \leqslant N}(\pi_n)$ où $N$ est un nombre *fini* implique que $1_\Gamma \prec \pi_n$ pour l'un des $n$ au moins. Il résulterait donc de $(\star)$ que l'une au moins des relations

$$(\star_H) \qquad 1_G \prec \bigoplus_{s \in \Sigma^H} Ind_{Z(s,G)}^{G}(1_{Z(s,G)})$$

$$(\star_T) \qquad 1_G \prec \bigoplus_{s \in \Sigma^T} Ind_{Z(s,G)}^{G}(1_{Z(s,G)})$$

aurait lieu.

Supposons d'abord que $(\star_T)$ ait lieu. Pour tout $s = (s_H, s_T) \in \Sigma^T$, posons

$$H(s) = G_H \times Z(s_T, G_T) .$$

Le lemme 4.ii implique que l'on aurait

$$1_G \prec \bigoplus_{s \in \Sigma^T} Ind_{H(s)}^G (1_{H(s)})$$

et donc aussi la relation équivalente

$$1_{G_T} \prec \bigoplus_{s \in \Sigma^T} Ind_{Z(s_T, G_T)}^{G_T} (1_{Z(s_T, G_T)}) .$$

Comme $s_T \neq e$ pour tout $s \in \Sigma^T$, les hypothèses du théorème stipulent que $Z(s_T, G_T)$ n'est pas de covolume fini dans $G_T$. La dernière relation de contenance faible ci-dessus serait donc en contradiction avec le lemme 5.

Supposons alors que la relation $(\star_H)$ ait lieu. Le même argument que plus haut implique que l'on aurait aussi

$$1_{G_H} \prec \bigoplus_{s \in \Sigma^H} Ind_{Z(s_H, G_H)}^{G_H} (1_{Z(s_H, G_H)}) .$$

Vu les hypothèses du théorème B, il existe sur $\Omega$ une mesure de probabilité $Z(s_H, G_H)$-invariante. La dernière relation de contenance faible ci-dessus serait alors en contradiction avec le lemme 6 appliqué à $G_H$ agissant sur $\Omega$. $\square$

*Preuve du théorème A.* Il suffit de vérifier que les hypothèses du théorème A impliquent celles du théorème B lorsque $S = \Gamma$. Soit $x \in G_H - \{e\}$ tel que $(x, e) \in \Gamma$. L'hypothèse (c) du théorème A implique que $x$ est d'ordre infini; comme $\Gamma$ est discret dans $G$, cela implique que $x^{\mathbf{Z}}$ n'est pas relativement compact. L'hypothèse (a) du théorème A implique donc l'hypothèse (a) du théorème B. Comme les hypothèses (b) coïncident dans les deux théorèmes, ceci achève la preuve du théorème A. $\square$

*Preuve de la proposition 2.* Soit $G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$, avec $G_\alpha = \mathbf{G}(\mathbf{k}_\alpha)$ simple non compact et de centre réduit à $\{e\}$, comme à la proposition 2. On peut supposer les notations telles que $A = B \amalg D$, avec $G_\beta$ de rang déployé un pour tout $\beta \in B$ et avec $G_\delta$ de rang déployé au moins deux pour tout $\delta \in D$. On pose alors $G_H = \prod_{\beta \in B} G_\beta$ et $G_T = \prod_{\delta \in D} G_\delta$. On considère un réseau sans torsion $\Gamma_0$ de $G = G_H \times G_T$. Vérifions les hypothèses du théorème A.

(a) Pour chaque $\beta \in B$, le groupe $G_\beta$ agit par isométries sur un espace $X_\beta$ qui est un espace hyperbolique approprié (lorsque $\mathbf{k}_\beta$ est archimédien) ou un arbre (dans les autres cas). Notons $\Omega_\beta$ le bord de $X_\beta$ (à la Gromov). Soit $g_\beta \in G_\beta$ tel que $g_\beta^{\mathbf{Z}}$ n'est pas relativement compact dans $G_\beta$. Alors $g_\beta$ a exactement un ou deux points fixes dans $\Omega_\beta$, et il existe sur $\Omega_\beta$ une mesure de probabilité $Z(g_\beta, G_\beta)$-invariante (à support ces un ou deux points).

Le groupe $G_H$ agit sur la réunion disjointe $\Omega = \amalg_{\beta \in B} \Omega_\beta$ par $((g_\beta)_{\beta \in B})x = g_{\beta_0}x$ pour $x \in \Omega_{\beta_0}$.

Soit $\mu$ une mesure finie $G$-invariante sur $\Omega$; pour tout $\beta \in B$, la mesure induite $\mu_\beta$ sur $\Omega_\beta$ est $G_\beta$-invariante, donc réduite à zéro puisque $G_\beta$ n'est pas moyennable; par suite $\mu = 0$. Soit $g = (g_\beta)_{\beta \in B} \in G_H$ tel que $g^{\mathbf{Z}}$ ne soit pas relativement compact dans $G_H$; il existe $\beta_0 \in B$ tel que $(g_{\beta_0})^{\mathbf{Z}}$ ne soit pas relativement compact dans $G_{\beta_0}$, et par suite il existe comme ci-dessus une mesure de probabilité $Z(g_{\beta_0}, G_{\beta_0})$-invariante sur $\Omega_{\beta_0}$; en prolongeant cette mesure par zéro sur $_{\beta \neq \beta_0}\Omega_\beta$, on obtient une mesure de probabilité $Z(g, G_H)$-invariante sur $\Omega$. L'action de $G_H$ sur $\Omega$ vérifie donc bien les hypothèses (a) du théorème.

(b) Le groupe $G_T$ a la propriété (T) car c'est un produit direct de groupes qui ont cette propriété. D'autre part, pour tout $\delta \in D$ et pour tout $x_\delta \in G_\delta - \{e\}$, le centralisateur $Z(x_\delta, G_\delta)$ n'est pas Zariski-dense dans $G_\delta$. Il résulte donc du théorème de densité de Borel que $Z(x_\delta, G_\delta)$ n'est pas de covolume fini dans $G_\delta$ (voir [Zim, Theorem 3.2.5] si le corps local $\mathbf{k}_\delta$ est archimédien, et [Wan] sinon). Par suite, si $x = (x_\delta)_{\delta \in D} \in G_T - \{e\}$, on a $Z(x, G_T) = \prod_{\delta \in B} Z(x_\delta, G_\delta)$ et $Z(x, G_T)$ n'est pas de covolume fini dans $G_T = \prod_{\delta \in D} G_\delta$.

(c) Cette hypothèse du théorème A est strictement contenue dans les hypothèses de la proposition 2. □

Le théorème B permet par exemple de généraliser comme suit l'énoncé de la proposition 2. On considère un groupe $G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha = G_H \times G_T$ comme dans la preuve précédente.

PROPOSITION $2^{\text{bis}}$. *Soit $G$ comme ci-dessus et soit $\Gamma$ un réseau de $G$ tel que $\Gamma \cap (G_H \times \{e\})$ soit sans torsion. Alors tout sous-groupe $S$ de $G$ contenant $\Gamma$ est non intérieurement moyennable.*

Notons d'une part que $S$ n'est pas nécessairement fermé dans $G$, et d'autre part que l'assertion de non moyennabilité intérieure porte sur $S$ vu comme «groupe discret».

*Preuve de la proposition 1.* Elle résulte de la proposition 2, comme indiqué dans l'introduction. □

Avant d'entreprendre la preuve de la proposition 3, considérons un corps $\mathbf{k}$ muni d'une valeur absolue

$$\begin{cases} \mathbf{k} & \to & \mathbf{R}_+ \\ \lambda & \mapsto & |\lambda| \end{cases}$$

par rapport à laquelle $\mathbf{k}$ est un corps local (c'est-à-dire est localement compact et non discret). On sait qu'une telle valeur absolue possède un prolongement unique à une clôture algébrique $\mathbf{k}_\alpha$ de $\mathbf{k}$ [Wae, Section 18.4] et donc à la complétion correspondante $\mathbf{K}$ de $\mathbf{k}_\alpha$. La droite projective $P^1_{\mathbf{K}}$ hérite ainsi de $\mathbf{K}$ une topologie qui rend continue l'action naturelle de $PGL(2, \mathbf{k})$. (On prendra garde que $P^1_{\mathbf{K}}$ n'est en général pas compact, car $\mathbf{K}$ n'est en général pas localement compact.)

Soit $x \in PGL(2, \mathbf{k})$, $x \neq e$ un élément représenté par une matrice $\tilde{x} \in GL(2, \mathbf{k})$ de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{k}_\alpha$. Rappelons que $x$ est dit *hyperbolique* [respectivement *parabolique, elliptique,*] si $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$ [resp. $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $|\lambda_1| = |\lambda_2|$]. Ainsi $x$ possède exactement deux points fixes sur $P^1_{\mathbf{K}}$ si $x$ est hyperbolique ou elliptique, et un point fixe si $x$ est parabolique.

Pour un élément hyperbolique $h \in PGL(2, \mathbf{k})$, on note $\omega_h$ le point fixe correspondant à la valeur propre $\lambda_\omega$ de $h$ telle que $|\lambda_\omega| = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$, et $\alpha_h$ l'autre point fixe de $h$ dans $P^1_{\mathbf{K}}$. Etant donné des voisinages $A_h$, $\Omega_h$ de $\alpha_h, \omega_h$ dans $P^1_{\mathbf{K}}$, il existe alors un entier $n_0$ tel que

$$h^n(P^1_{\mathbf{K}} - A_h \cup \Omega_h) \subset A_h \cup \Omega_h$$

pour tout $n$ tel que $|n| \geqslant n_0$.

LEMME 7. *Soient* $\mathbf{k}$ *un corps local et* $S$ *un sous-groupe de* $PGL(2, \mathbf{k})$. *On suppose que*

*(i)* $S$ *ne contient pas de sous-groupe résoluble d'indice fini,*

*(ii)* $S$ *contient un élément hyperbolique.*

*Alors* $S$ *n'est pas intérieurement moyennable.*

*Preuve.* Soit $h_0 \in S$ un élément hyperbolique de points fixes $\alpha_0, \omega_0 \in P^1_{\mathbf{K}}$. Le groupe $S$ est Zariski-dense dans $G = PGL(2, \mathbf{k})$, car les sous-groupes algébriques connexes de $G$ distincts de $G$ sont résolubles. Il existe donc $x_1, x_2, x_3 \in S$ tels que les huit points $\alpha_0, \omega_0$

et $x_j(\alpha_0)$, $x_j(\omega_0)$ $(1 \leqslant j \leqslant 3)$ sont distincts. Pour $j \in \{1, 2, 3\}$, on pose $h_j = x_j h_0 x_j^{-1}$ et on note $\alpha_j, \omega_j$ ses points fixes. Quitte à remplacer chacun des éléments $h_0, h_1, h_2, h_3$ par une puissance convenable, on peut alors trouver

des voisinages $E_j$ de $\{\alpha_j, \omega_j\}$ disjoints deux à deux $(1 \leqslant j \leqslant 3)$ *et*

un domaine fondamental $D$ pour l'action de $h_0^{\mathbf{Z}}$ sur $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}^1 - \{\alpha_0, \omega_0\}$ contenant les $E_j$

tels que

$$h_j^n(P_{\mathbf{K}}^1 - E_j) \subset E_j \quad \text{pour tous} \quad n \in \mathbf{Z}, n \neq 0 \text{ et } j \in \{1, 2, 3\} .$$

Posons

$$C = \mathbf{P}_{\mathbf{K}}^1 - D$$

$$T = \left\{ s \in S - \{e\} \;\middle|\; \begin{array}{c} s \text{ possède un point fixe dans } C \\ s \text{ ne possède aucun point fixe dans } E_1 \cup E_2 \cup E_3 \end{array} \right\}$$

On vérifie qu'on a

$$(\star) \qquad \begin{array}{c} S - \{e\} = T \cup h_0 T h_0^{-1} \cup h_0^{-1} T h_0 \\ T, h_1 T h_1^{-1}, \; h_2 T h_2^{-1}, \; h_3 T h_3^{-1} \text{ disjoints deux à deux .} \end{array}$$

En effet, tout élément $s \in h_1 T h_1^{-1}$ possède un point fixe dans $E_1$ (par suite $s \notin T$) et n'en possède aucun dans $E_2 \cup E_3$, sinon $h_1^{-1} s h_1 \in T$ en posséderait dans $h_1^{-1}(E_2 \cup E_3) \subset E_1$, contrairement à la définition de $T$ (par suite $s \notin h_2 T h_2^{-1} \cup h_3 T h_3^{-1}$); les autres vérifications sont analogues.

Il résulte de $(\star)$ que $S$ n'est pas intérieurement moyennable. (Voir [HaS]; un argument de ce type apparaît dans la preuve du théorème 5 de [BeH], mais n'y est pas correct, car une transformation elliptique de l'arbre de Bruhat-Tits concerné peut posséder *plusieurs* points fixes.) $\square$

*Remarques.* (1) Si $\mathbf{k}$ est de caractéristique nulle ou impaire, on sait qu'il existe une extension *finie* de $\mathbf{k}$ contenant les racines de tous les polynômes du second degré à coefficients dans $\mathbf{k}$, donc les valeurs propres de toute matrice $\tilde{x} \in GL(2, \mathbf{k})$. Mais ceci n'est pas vrai lorsque $\mathbf{k} = \mathbf{F}_2((t))$, d'où l'introduction du corps $\mathbf{K}$ ci-dessus.

(2) Considérons le sous-groupe $S = PSL(2, \mathbf{Z})$ du groupe $G = PSL(2, \mathbf{Q}_p)$. Le groupe $S$ ne contient pas de sous-groupe résoluble d'indice fini, et ne contient pas d'élément hyperbolique (car $S$ est contenu dans le sous-groupe compact $PSL(2, \mathbf{Z}_p)$ de $G$). Pour la preuve ci-dessus, on ne peut donc pas supprimer du lemme 7 l'hypothèse (ii).

On peut sans doute supprimer (ii) en raisonnant comme au lemme 4.1 de [Tit], ce qui pour l'exemple ci-dessus revient à plonger $PSL(2, \mathbf{Z})$ dans $PSL(2, \mathbf{R})$. Mais la preuve du cas général sans l'hypothèse (ii) dépasse l'ambition du présent travail.

*Preuve de la proposition 3.* L'assertion pour $d = 2$ résulte du lemme 7. L'assertion pour $d \geqslant 3$ résulte du théorème B. $\square$

Le premier auteur remercie Bachir Bekka, Marc Burger et Alain Valette pour d'utiles commentaires.

## RÉFÉRENCES


[BeH] BEDOS, E. et P. DE LA HARPE. Moyennabilité intérieure des groupes: définitions et exemples. *L'Enseignement math. 32* (1986), 139-157.

[Dix] DIXMIER, J. *Les C*-algèbres et leurs représentations.* Gauthier-Villars, 1969.

[Efr] EFFROS, E.G. Property Γ and Inner Amenability. *Proc. Amer. Math. Soc. 47* (1975), 483-486.

[Eym] EYMARD, P. *Initiation à la théorie des groupes moyennables.* Springer Lecture Notes 497 (1975), 89-107.

[EyL] EYMARD, P. et N. LOHOUÉ. Sur la racine carrée du noyau de Poisson dans les espaces symétriques et une conjecture de E.M. Stein. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 8* (1975), 179-188.

[Fur] FURSTENBERG, H. A Poisson Formula for Semisimple Lie Groups. *Annals of Math. 77* (1963), 335-383.

[GiH] GIORDANO, T. et P. DE LA HARPE. Groupes de tresses et moyennabilité intérieure. *Arkiv för Mat. 29* (1991), 63-72.

[Gre] GREENLEAF, F.P. *Invariant Means on Topological Groups.* Van Nostrand, 1969.

[HaJ] DE LA HARPE, P. et K. JHABVALA. Quelques propriétés des algèbres d'un groupe discontinu d'isométries hyperboliques. In: *Ergodic Theory* (Séminaire, Les Plans-sur-Bex, 1980), *Monographie de l'Enseignement Math. 29* (1981), 47-55.

[HaS] DE LA HARPE, P. et G. SKANDALIS. Un résultat de Tarski sur les actions moyennables de groupes et les partitions paradoxales. *L'Enseignement Math. 32* (1986), 121-138.

[Lu1] LUBOTZKY, A. Trees and Discrete Subgroups of Lie Groups over Local Fields. *Bull. Amer. Math. Soc. 20* (1989), 27-30.

[Lu2] —— Lattices in Rank One Lie Groups over Local Fields. *Geom.-Funct.-Anal. 1* (1991), 406-431.

[Mar] MARGULIS, G.A. *Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups.* Springer, 1991.

[Pat] PATERSON, A.T. *Amenability.* Math. Surveys and Monographs 29, Amer. Math. Soc., 1988.

[Ra1] RAGHUNATHAN, M.S. *Discrete Subgroups of Lie Groups.* Springer, 1972.

[Ra2] —— Discrete Subgroups of Algebraic Groups over Local Fields of Positive Characteristics. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 99* (1989), 127-146.

[Sel] SELBERG, A. *On Discontinuous Groups in Higher-dimensional Symmetric Spaces.* (International Colloquium on Function Theory, Bombay, 1960). *Collected Papers, volume I,* 475-492.

[Ser] SERRE, J.-P. *Arbres, amalgames,* $SL_2$. Astérisque 46, Soc. Math. France, 1977.

[Tit] TITS, J. Free Subgroups in Linear Groups. *J. of Algebra 20* (1972), 250-270.

[Wae] van der WAERDEN, B.L. *Algebra, Volume 2.* F. Ungar, 1970.

[Wan] WANG, S.P. On Density Properties of Subgroups of Locally Compact Groups. *Annals of Math. 94* (1971), 325-329.

[Zim] ZIMMER, R.J. *Ergodic Theory and Semisimple Groups.* Birkhäuser, 1984.

*(Reçu le 15 mars 1994)*

P. de la Harpe

Section de mathématiques
Université de Genève
C.P. 240
1211 Genève 24
(Suisse)

G. Skandalis

Collège de France, Annexe
3 rue d'Ulm
75005 Paris
(France)

vide-leer-empty