

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 39 (1993)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: POLYNÔMES ASSOCIÉS AUX ENDOMORPHISMES DE GROUPES LIBRES
Autor: Peyrière, Jacques

Bibliographie
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-60419>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

sur les déterminants. Par ailleurs, pour une matrice 2×2 , A , le théorème de Cayley-Hamilton s'écrit

$$A^2 - A(\operatorname{tr} A) + \frac{1}{2} [(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr} A^2] = 0.$$

Donc, si A_1, A_2, \dots, A_n sont n matrices 2×2 inversibles, par une méthode analogue à celle que nous avons développée, tout produit de la forme $X_1^{n_1} X_2^{n_2} \dots X_k^{n_k}$ (avec $n_j \in \mathbf{Z}$ et $X_j \in \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ pour $j = 1, 2, \dots, n$) a une trace qui s'exprime comme fraction rationnelle à coefficients entiers en les traces des produits $\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}\}_{i \in I}$ et les traces des matrices $\{A_j^2\}_{j=1,2,\dots,n}$.

NOTE AJOUTÉE SUR ÉPREUVES

Au moment de corriger les épreuves, les auteurs ont eu connaissance d'un certain nombre de travaux antérieurs ([9] à [16]) sur le même sujet.

L'existence de P_ω a été prouvée par Horowitz [9]. L'application induite Φ_σ a été considérée (seulement dans le cas où σ est un isomorphisme) également par Horowitz [10] qui a aussi déterminé le noyau de Φ . La considération du polynôme Q_σ est nouvelle. Le lemme 2 de la section II se trouve dans [15].

Certaines démonstrations données ici sont plus simples que celles de Horowitz, bien qu'il y ait des recouvrements. Alors que Horowitz n'utilise que des relations entre traces, nos calculs prennent place dans l'algèbre introduite par Procesi [13] et Razmyslov [14], ce qui simplifie considérablement les calculs. D'ailleurs, Magnus [12] fait allusion à la complexité des démonstrations de certaines identités (par exemple, les lemmes 3 et 4 de la section VI) et demande s'il est possible de les simplifier. Signalons qu'une description complète de l'idéal des relations entre traces a été donnée par Whittemore [16] dans le cas d'un groupe libre à quatre générateurs.

Les articles [11], [13] et [14] traitent des identités pour les matrices $n \times n$.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] ALLOUCHE, J.-P. et J. PEYRIÈRE. Sur une formule de récurrence sur les traces de produits de matrices associées à certaines substitutions. *C. R. Acad. Sc. Paris* 302 (II) (1986), 1135-1136.
- [2] CULLER, Marc and Peter B. SHALEN. Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds. *Ann. of Math.* 117 (1983), 109-146.
- [3] KOLAR, M. and M. K. ALI. Preprint, University of Lethbridge, January 22, 1990; Trace maps associated with general two-letter substitution rules. *Phys. Rev. A*, submitted.

- [4] KOLAR, M. and F. NORI. Trace maps of general substitutional sequences. *Phys. Rev. B* 42 (1990), 1062-1065.
- [5] NEUMANN, B. H. Die Automorphismengruppe der freien. *Math. Ann.* 107 (1933), 367-386.
- [6] NIELSEN, J. Die Isomorphismen der allgemeinen unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden. *Math. Ann.* 78 (1918), 385-397.
- [7] — Die Isomorphismen der freien Gruppen. *Math. Ann.* 91 (1924), 169-209.
- [8] PEYRIÈRE, J. On the trace map for products of matrices associated with substitutive sequences. *J. Stat. Phys.* 62 (1991), 411-414.
- [9] HOROWITZ, R. D. Characters of Free Groups Represented in the Two-Dimensional Special Linear Group. *Comm. Pure and Applied Math.* 25 (1972), 635-649.
- [10] — Induced automorphisms on Fricke Characters of Free Groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* 208 (1975), 41-50.
- [11] LERON, U. Trace Identities and Polynomial Identities of $n \times n$ Matrices. *J. of Algebra* 42 (1976), 369-377.
- [12] MAGNUS, W. Rings of Fricke Characters and Automorphism Groups of Free Groups. *Math. Z.* 170 (1980), 91-103.
- [13] PROCESI, C. The Invariant Theory of $n \times n$ Matrices. *Advances in Math.* 19 (1976), 306-381.
- [14] RAZMYSLOV, Ju. P. Trace Identities of Full Matrix Algebras over a Field of Characteristic Zero. *Izv. Akad. Nauk SSSR ser. Mat.* 38 (1974) No. 4 (en russe); English translation: *Math. USSR Izvestija* 8 (1974), 727-760.
- [15] TRAINA, C. *Representation of the Trace Polynomial of Cyclically Reduced Words in a Free Group on Two Generators*. Ph.D. Thesis, Polytechnic Institute of New York.
- [16] WHITTEMORE, A. On Special Linear Characters of Free Groups of Rank $n \geq 4$. *Proc. Amer. Math. Soc.* 40 (1973), 383-388.

(Reçu le 16 avril 1992)

Jacques Peyrière

CNRS URA D0757
Université de Paris Sud
Mathématiques - Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex (France)

Wen Zhi-Ying et Wen Zhi-Xiong

Université de Wuhan
Mathématiques
Wuhan, Hubei
(République Populaire de Chine)

Vide-leer-empty