Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: POLYNÔMES ASSOCIÉS AUX ENDOMORPHISMES DE GROUPES LIBRES

Autor: Peyrière, Jacques

Kapitel: VI. Cas d'un groupe libre à plus de deux générateurs

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60419

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 29.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

en ayant tenu compte des relations $\lambda(0,0,0) = -4$ et $\lambda'(0,0,0) = 0$. La conclusion résulte de $\lambda''(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Prenons un exemple: $\sigma = (aba^2b^2a, aba^3bab)$. Calculons $\Phi_\sigma(0,0,z)$. La réduction de σ donne $(aba, -(ab)^3)$ donc

$$\Phi_\sigma(0,0,z) = (0, -t_3(z), 0) = (0, 3z - z^3, 0)$$

et

$$Q_\sigma(0,0,z) = u_3(z)^2 = (z^2-1)^2 .$$

Pour calculer $\Phi_\sigma(x,0,0)$, multiplions σ par (ab, b^{-1}), on obtient $(babab, bab)$, qui est réduit. Donc

$$\Phi_\sigma(x,0,0) = (0,0,-t_1(x)) = (0,0,-x)$$

et

$$Q_\sigma(x,0,0) = u_1(x)^2 = 1 .$$

De façon analogue, on obtient

$$\Phi_\sigma(0,y,0) = (p_3(y),0,0) = (y^3 - 3y, 0, 0)$$

et

$$Q_\sigma(0,y,0) = (y^2-1)^2 .$$

Ensuite on a

$$-2Q''_\sigma(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - I$$

d'où

$$Q''_\sigma(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

VI. Cas d'un groupe libre à plus de deux générateurs

Avant de passer à la généralisation partielle de ce qui précède, nous avons besoin d'un certain nombre de lemmes sur $SL(2, \mathbf{C})$.

LEMME 1. *Soit A et B deux éléments de $SL(2, \mathbf{C})$. On a*

$$ABA = A \operatorname{tr} AB - B^{-1}$$

et

$$\operatorname{tr}(ABA) = (\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} AB) - (\operatorname{tr} B) .$$

Démonstration. On a, par Cayley-Hamilton, $AB + (AB)^{-1} = \operatorname{tr} AB$, d'où

$$ABA + B^{-1} = A \operatorname{tr} AB .$$

LEMME 2 (Formule de Fricke). *Si A et B sont deux éléments de $SL(2, \mathbf{C})$, on a*

$$\operatorname{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) = (\operatorname{tr} A)^2 + (\operatorname{tr} B)^2 + (\operatorname{tr} AB)^2 - (\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} B)(\operatorname{tr} AB) - 2 .$$

Démonstration. Une utilisation répétée du théorème de Cayley-Hamilton suivie de celle du lemme précédent donne

$$\begin{aligned} ABA^{-1}B^{-1} &= AB(\operatorname{tr} AB - BA) \\ &= AB \operatorname{tr} AB - A(B \operatorname{tr} B - 1)A \\ &= AB \operatorname{tr} AB - (A \operatorname{tr} AB - B^{-1}) \operatorname{tr} B + A \operatorname{tr} A - 1 \end{aligned}$$

d'où le résultat, en prenant les traces des deux membres.

Considérons maintenant trois éléments A_1, A_2, A_3 de $SL(2, \mathbf{C})$ dont les traces sont respectivement x_1, x_2 et x_3. On note y_1, y_2 et y_3 les traces de A_2A_3, A_3A_1 et A_1A_2.

LEMME 3. *On a* $\operatorname{tr} A_1A_2A_3 + \operatorname{tr} A_1A_3A_2 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_1x_2x_3$.

Démonstration. En vertu du lemme I.1, on a

$$A_2A_3 + A_3A_2 = y_1 - x_2x_3 + x_3A_2 + x_2A_3$$

d'où

$$A_1A_2A_3 + A_1A_3A_2 = (y_1 - x_2x_3)A_1 + x_3A_1A_2 + x_2A_1A_3 ,$$

d'où le résultat.

LEMME 4. *On a*

$$\begin{aligned} &(\operatorname{tr} A_1A_2A_3)(\operatorname{tr} A_1A_3A_2) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_2^3 - x_1x_2y_3 - x_2x_3y_1 - x_3x_1y_2 + y_1y_2y_3 - 4 . \end{aligned}$$

Démonstration. Utilisant le lemme 1 de deux façons, on obtient

$$A_1A_2A_3A_1A_3A_2 = (A_1 \operatorname{tr}(A_1A_2A_3) - A_3^{-1}A_2^{-1})A_3A_2$$
$$= A_1A_2(y_2A_3 - A_1^{-1})A_2$$

d'où

$$\begin{aligned} A_1A_3A_2 \operatorname{tr}(A_1A_2A_3) &= A_3^{-1}A_2^{-1}A_3A_2 + y_2A_1A_2A_3A_2 - A_1A_2A_1^{-1}A_2 \\ &= A_3^{-1}A_2^{-1}A_3A_2 + y_2A_1(y_1A_2 - A_3^{-1}) \\ &\quad - A_1(A_2 \operatorname{tr}(A_2A_1^{-1}) - A_1) \\ &= A_3^{-1}A_2^{-1}A_3A_2 + y_2A_1(y_1A_2 - x_3 + A_3) \\ &\quad - A_1A_2(x_1x_2 - y_3) + x_1A_1 - 1 , \end{aligned}$$

d'où le résultat.

COROLLAIRE 5. *Les nombres* $\operatorname{tr}(A_1A_2A_3)$ *et* $\operatorname{tr}(A_1A_3A_2)$ *sont les racines de l'équation suivante, dont l'inconnue est* z:

$$z^2 - p(X, Y)z + q(X, Y) = 0$$

où

$$p(X, Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_1x_2x_3$$

et

$$\begin{aligned} q(X, Y) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - x_1x_2y_3 - x_2x_3y_1 \\ - x_3x_1y_2 + y_1y_2y_3 - 4 . \end{aligned}$$

Nous venons de définir les polynômes p et q en les variables $X = (x_1, x_2, x_3)$ et $Y = (y_1, y_2, y_3)$. Posons

$$\Lambda(X, Y, z) = z^2 - p(X, Y)z + q(X, Y) .$$

PROPOSITION 6. *Le polynôme* Λ *est irréductible dans* $\mathbf{C}[X, Y, z]$.

Démonstration. Si Λ était décomposable, le polynôme $p^2 - 4q$ serait un carré dans $\mathbf{C}[X, Y]$. Il en serait de même du polynôme $(p^2 - 4q)(0, 0, 0, y_1, y_2, y_3)$ dans $\mathbf{C}[y_1, y_2, y_3]$. Or $(p^2 - 4q)(0, 0, 0, y_1, y_2, y_3)$ est de degré 3, c'est donc impossible.

Notons V la sous-variété algébrique de $\mathbf{C}^7$, ensemble des zéros de Λ. Elle est irréductible.

Désignons par T l'application de $[SL(2, \mathbf{C})]^3$ dans $\mathbf{C}^7$ ainsi définie:

$$T(A_1, A_2, A_3) = (\operatorname{tr} A_1, \operatorname{tr} A_2, \operatorname{tr} A_3, \operatorname{tr} A_2A_3, \operatorname{tr} A_3A_1, \operatorname{tr} A_1A_2, \operatorname{tr} A_1A_2A_3) .$$

Il résulte du corollaire 5 que l'image de T est contenue dans la variété V.

PROPOSITION 7. *L'image de* T *est la variété* V.

Démonstration. Donnons-nous un point $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z) \in V$. Nous avons à construire trois matrices A_1, A_2, A_3 telles que $T(A_1, A_2, A_3) = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z)$. Nous allons distinguer plusieurs cas

— l'une des expressions $\lambda(x_1, x_2, y_3)$, $\lambda(x_2, x_3, y_1)$, $\lambda(x_3, x_1, y_2)$ n'est pas nulle.

Traitons le cas où $\lambda(x_1, x_2, y_3) \neq 0$. Prenons

$$A_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\tau^{-1} \\ \tau & x_2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} t & u \\ v & x_3 - t \end{pmatrix}.$$

Nous devons en outre avoir

$$\begin{aligned} & tx_1 + v - u = y_2 \\ & -\tau^{-1}v + \tau u + x_2(x_3 - t) = y_1 \\ & \tau t + (x_2 - \tau^{-1}x_1)v + \tau^{-1}(x_3 - t) = z \\ & \tau + \tau^{-1} = y_3 \\ & t(x_3 - t) - uv = 1 . \end{aligned}$$

Les trois premières équations forment un système linéaire en t, u, v dont le déterminant, compte tenu de la quatrième équation, vaut $-\lambda(x_1, x_2, y_3)$, qui est non nul par hypothèse. La compatibilité avec la dernière équation est assurée par la relation

$$\Lambda(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z) = 0 .$$

— $\lambda(x_1, x_2, y_3) = \lambda(x_2, x_3, y_1) = \lambda(x_3, x_1, y_2) = 0$ et l'un au moins des $|x_i|$ est différent de 2.

Traitons le cas $|x_1| \neq 2$.

On vérifie que l'on peut prendre les trois matrices soit sous la forme

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 1 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ w & v^{-1} \end{pmatrix},$$

soit sous la forme

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 1 & u^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & w \\ 0 & v^{-1} \end{pmatrix}.$$

— Enfin dans le dernier cas, on peut choisir pour A_1, A_2, A_3 les matrices $\pm I$, $\pm I$, $\pm I$.

PROPOSITION 8. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. A_1, A_2, A_3 *ont une direction propre commune.*
2. $\lambda(x_1, x_2, y_3) = \lambda(x_2, x_3, y_1) = \lambda(x_3, x_1, y_2) = 0$ *et* $\operatorname{tr} A_1A_2A_3 = \operatorname{tr} A_1A_3A_2$.
3. $\lambda(x_1, x_2, y_3) = \lambda(x_2, x_3, y_1) = \lambda(x_3, x_1, y_2) = \delta(X, Y) = 0$

où $\delta = p^2 - 4q$.

Démonstration. Clairement les assertions 2 et 3 sont équivalentes et sont impliquées par la première.

Supposons donc que l'on ait $\lambda(x_1, x_2, y_3) = \lambda(x_2, x_3, y_1) = \lambda(x_3, x_1, y_2) = 0$ et que A_1, A_2, A_3 n'aient pas de direction propre commune. Comme les opérateurs A_1, A_2, A_3 ont deux à deux une direction propre commune, on peut dans une base convenable les représenter par des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & \xi \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} v & 0 \\ \zeta & v^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \zeta\xi \neq 0 \quad \text{et} \quad t \neq \pm 1 \,.$$

On vérifie alors que $\operatorname{tr} A_1A_2A_3 = tuv + (tuv)^{-1} + \zeta\xi t$ et $\operatorname{tr} A_1A_3A_2 = tuv + (tuv)^{-1} + \zeta\xi t^{-1}$. Et donc $\operatorname{tr} A_1A_2A_3 \neq \operatorname{tr} A_1A_3A_2$. Ceci achève la démonstration.

Nous pouvons maintenant envisager de généraliser la section I au cas d'un groupe libre ayant un nombre fini de générateurs. Nous considérons d'abord le cas de F_3, le groupe libre engendré par a_1, a_2, a_3. Si φ est un homomorphisme de F_3 dans $SL(2, \mathbf{C})$, nous poserons

$$T\varphi = T(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \varphi(a_3)) \,.$$

PROPOSITION 9. *Si* $w \in F_3$, *il existe un polynôme* $P \in \mathbf{Z}[X, Y, z]$, *unique modulo* Λ, *tel que pour tout* $\varphi \in \operatorname{Hom}(F_3, SL(2, \mathbf{C}))$ *on ait*

$$\operatorname{tr}(w) = P(T\varphi) \,.$$

Démonstration. L'existence se démontre par application répétée du théorème de Cayley-Hamilton et du lemme I.1. L'unicité résulte de la proposition 7.

THÉORÈME 10. *Si* σ *est un endomorphisme de* F_3, *il existe une unique application polynomiale* Φ_σ *de* V *dans* V *telle que, pour tout* $\varphi \in \operatorname{Hom}(F_3, SL(2, \mathbf{C}))$ *on ait*

$$T(\varphi \circ \sigma) = \Phi_\sigma(T\varphi) \,.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente aux éléments $\sigma(a_1)$, $\sigma(a_2)$, $\sigma(a_3)$, $\sigma(a_2a_3)$, $\sigma(a_3a_1)$, $\sigma(a_1a_2)$ et $\sigma(a_1a_2a_3)$ de F_3.

COROLLAIRE 11. *Si* σ *et* τ *sont deux endomorphismes de* F_3, *et si l'on pose* $\sigma\tau = \tau \circ \sigma$, *on a* $\Phi_{\sigma\tau} = \Phi_\sigma \circ \Phi_\tau$.

PROPOSITION 12. *Soit* Ω *la sous-variété de* V *définie par* $\Lambda(X, Y, z) = 0$, $\lambda(x_1, x_2, y_3) = \lambda(x_2, x_3, y_1) = \lambda(x_3, x_1, y_2) = \delta(X, Y) = 0$. *Alors* Ω *est invariante par toute application* Φ_σ.

Démonstration. Ceci résulte de la proposition 8.

Les calculs sur F_n, le groupe libre engendré par $a_1, a_2, \cdots, a_n$, sont moins explicites. Soit I l'ensemble des parties non vides de $\{1, 2, \cdots, n\}$. Un élément i de I est la donnée de ses éléments $i_1, i_2, \cdots, i_k$ ordonnés en croissant. Pour chaque $\varphi \in \mathrm{Hom}(F_n, SL(2, \mathbf{C}))$, on note $T\varphi$ la collection $\{\mathrm{tr}\, \varphi(a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k})\}_{i \in I}$, qui ne dépend que de la classe de la représentation φ. On sait que l'ensemble des classes de représentations est une variété algébrique [2]. Sa dimension est $3(n-1)$. On peut le voir en observant que, sauf cas exceptionnels, on peut, étant donné $\varphi \in \mathrm{Hom}(F_n, SL(2, \mathbf{C}))$, fixer une base de $\mathbf{C}^2$ de façon que les matrices de $\varphi(a_1)$ et $\varphi(a_2)$ aient la forme $\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -t^{-1} \\ t & x_2 \end{pmatrix}$. Les autres éléments $\varphi(a_3), \cdots, \varphi(a_n)$ dépendent alors de $3(n-2)$ paramètres. Une application répétée du théorème de Cayley-Hamilton et de la proposition I.1 montre alors l'analogue de la proposition 9: étant donné $w \in F_n$, il existe un polynôme $P \in \mathbf{Z}[(x_i)_{i \in I}]$, unique modulo un certain idéal définissant une sous-variété algébrique de dimension $3(n-1)$ de $\mathbf{C}^I$, tel que, pour tout $\varphi \in \mathrm{Hom}(F_n, SL(2, \mathbf{C}))$, on ait $\mathrm{tr}\, \varphi(w) = P(T\varphi)$.

Pour chaque $\sigma \in \mathrm{End}(F_n)$ on définit de même que précédemment une application Φ_σ. Les applications Φ_σ laissent invariante une variété (celle qui est définie, en termes de traces, par le fait que n matrices 2×2 aient une direction propre commune).

Des résultats analogues sur F_n ont déjà été obtenus par Kolar et Nori [4]. On doit cependant observer qu'ils utilisent beaucoup trop de variables et qu'ils ne se sont pas préoccupés des questions d'unicité.

Dans deux articles à venir, l'un des auteurs donne un procédé général pour obtenir des relations entre les traces de matrice $p \times p$ et de leurs produits et traite le cas où au lieu de considérer les représentations d'un groupe libre dans $SL(2, \mathbf{C})$ on envisage des représentations dans $SL(3, \mathbf{C})$.

Terminons par une dernière remarque. Au lieu de considérer des représentations de F dans $SL(2, \mathbf{C})$, on peut utiliser des représentations dans $GL(2, \mathbf{C})$. En effet, à cause de l'homogénéité, le lemme I.1 est valable sans restriction sur les déterminants. Par ailleurs, pour une matrice 2×2, A, le théorème de Cayley-Hamilton s'écrit

$$A^2 - A(\operatorname{tr} A) + \frac{1}{2}\,[(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr} A^2] = 0\,.$$

Donc, si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont n matrices 2×2 inversibles, par une méthode analogue à celle que nous avons développée, tout produit de la forme $X_1^{n_1} X_2^{n_2} \cdots X_k^{n_k}$ (avec $n_j \in \mathbf{Z}$ et $X_j \in \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ pour $j = 1, 2, \cdots, n$) a une trace qui s'exprime comme fraction rationnelle à coefficients entiers en les traces des produits $\{A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}\}_{i \in I}$ et les traces des matrices $\{A_j^2\}_{j = 1, 2, \cdots, n}$.

Note ajoutée sur épreuves

Au moment de corriger les épreuves, les auteurs ont eu connaissance d'un certain nombre de travaux antérieurs ([9] à [16]) sur le même sujet.

L'existence de P_ω a été prouvée par Horowitz [9]. L'application induite Φ_σ a été considérée (seulement dans le cas où σ est un isomorphisme) également par Horowitz [10] qui a aussi déterminé le noyau de Φ. La considération du polynôme Q_σ est nouvelle. Le lemme 2 de la section II se trouve dans [15].

Certaines démonstrations données ici sont plus simples que celles de Horowitz, bien qu'il y ait des recouvrements. Alors que Horowitz n'utilise que des relations entre traces, nos calculs prennent place dans l'algèbre introduite par Procesi [13] et Razmyslov [14], ce qui simplifie considérablement les calculs. D'ailleurs, Magnus [12] fait allusion à la complexité des démonstrations de certaines identités (par exemple, les lemmes 3 et 4 de la section VI) et demande s'il est possible de les simplifier. Signalons qu'une description complète de l'idéal des relations entre traces a été donnée par Whittemore [16] dans le cas d'un groupe libre à quatre générateurs.

Les articles [11], [13] et [14] traitent des identités pour les matrices $n \times n$.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] Allouche, J.-P. et J. Peyrière. Sur une formule de récurrence sur les traces de produits de matrices associées à certaines substitutions. *C. R. Acad. Sc. Paris 302* (II) (1986), 1135-1136.

[2] Culler, Marc and Peter B. Shalen. Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds. *Ann. of Math. 117* (1983), 109-146.

[3] Kolar, M. and M. K. Ali. Preprint, University of Lethbridge, January 22, 1990; Trace maps associated with general two-letter substitution rules. *Phys. Rev. A,* submitted.