

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 39 (1993)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: POLYNÔMES ASSOCIÉS AUX ENDOMORPHISMES DE GROUPES LIBRES
Autor: Peyrière, Jacques
Kapitel: V. Autres propriétés des polynômes Q_a
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-60419>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Démonstration. On peut évidemment supposer que l'on a $d^0\psi_1 \leq d^0\psi_2 \leq d^0\psi_3$. La relation $\lambda \circ \psi = 0$ s'écrit $\psi_3(\psi_3 - \psi_1\psi_2) = 4 - \psi_1^2 - \psi_2^2$, d'où l'on déduit $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) \leq d^0\psi_2$. Supposons que l'on ait $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) \geq d^0\psi_3$. On a alors $d^0\psi_2 = d^0\psi_3$ et $d^0\psi_1 + d^0\psi_2 + d^0\psi_3 \leq 2d^0\psi_3$ et, donc, $\psi_1 = c \in R$. Par une procédure de descente analogue à celle de la démonstration du théorème II.4, par composition par divers Φ_τ on peut faire décroître $\deg \psi$ tant que l'une de ses composantes n'est pas constante.

THÉORÈME 5. *Pour $\sigma \in \text{Hom}(F, F)$, $Q_\sigma \equiv 0$ si et seulement si σ n'est pas injectif.*

Démonstration. Supposons σ non injectif. En vertu de la proposition 3, il existe $\mu \in \text{Aut } F$ tel que $\sigma\mu(b) = e$. Or, on sait que $Q_{\sigma\mu} = Q_\mu Q_\sigma \circ \Phi_\mu$. Or, il est facile de vérifier que $Q_{\sigma\mu} = 0$. Comme $Q_\mu \equiv 1$, cela implique $Q_\sigma \equiv 0$.

Supposons maintenant que l'on ait $Q_\sigma \equiv 0$. En vertu du lemme précédent, il existe $\tau \in \text{Aut } F$ tel que la première composante de $\Phi_{\tau\sigma}$ soit constante. Le lemme II.2 montre alors que $\tau\sigma(a) = e$, ce qui prouve que σ n'est pas injective.

V. AUTRES PROPRIÉTÉS DES POLYNÔMES Q_σ

THÉORÈME 1. *Pour tout $\sigma \in \text{End } F$, on a les faits suivants:*

1°) $Q_\sigma(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta) = (\det \sigma)^2$ pour tous $\varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}$.

2°) λ divise le polynôme $\det \Phi'_\sigma - (\det \sigma)Q_\sigma$.

Démonstration. Observons d'abord que si p et q sont deux entiers rationnels on a

$$P_{a^p b^q}(x, y, z) = zu_p(x)u_q(y) - xu_p(x)u_{q-1}(y) - yu_{p-1}(x)u_q(y) + 2u_{p-1}(x)u_{q-1}(y).$$

Si ε et η valent ± 1 , il est facile de vérifier que

$$P_{a^p b^q}(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta) = 2\varepsilon^p \eta^q$$

et de calculer le gradient de $P_{a^p b^q}$:

$$P'_{a^p b^q}(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta) = (\varepsilon p(p-q), \eta q(q-p), \varepsilon \eta pq) \varepsilon^p \eta^q.$$

Considérons maintenant un élément de σ de $\text{End } F$ dont la matrice est $\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. Ce qui précède montre que le point $(2, 2, 2)$ est point fixe pour Φ_σ et que l'ensemble $\{(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta); \varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}\}$ est globalement invariant par Φ_σ .

Démontrons la première assertion. Différentions deux fois la relation $\lambda \circ \Phi_\sigma = \lambda \cdot Q_\sigma$ au point $\omega = (2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta)$. On obtient

$${}^t\Phi'_\sigma(\omega)\lambda''(\Phi(\omega))\Phi'_\sigma(\omega) = \lambda''(\omega)Q_\sigma(\omega)$$

en ayant tenu compte de ce que $\lambda(\omega)$, $\lambda'(\omega)$ et $\lambda'(\Phi_\sigma(\omega))$ sont nuls. Par ailleurs, $\Phi_\sigma - (P_{apbq}, P_{arbs}, P_{ap+rbq+s})$ est un multiple de λ . Par conséquent, on obtient $\Phi'_\sigma(\omega)$ en différentiant en ω la fonction $(P_{apbq}, P_{arbs}, P_{ap+rbq+s})$. Tous calculs faits on obtient la première assertion.

Pour démontrer la seconde assertion, nous allons montrer que le polynôme $\det \Phi'_\sigma - (\det \sigma)Q_\sigma$ s'annule en suffisamment de points de Ω .

Considérons le point $\omega(t, u) = (2 \cos t, 2 \cos u, 2 \cos(t + u))$ de Ω . Son image par Φ_σ est le point $\omega(pt + qu, rt + su)$ que nous noterons $\omega \circ \tilde{\sigma}(t, u)$.

Par différentiation de la relation $\Phi_\sigma \circ \omega = \omega \circ \tilde{\sigma}$, on obtient

$$(\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t} \wedge (\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u} = (\det \sigma) \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \circ \tilde{\sigma} \right) \wedge \left(\frac{\partial \omega}{\partial u} \circ \tilde{\sigma} \right).$$

Par ailleurs, on établit facilement la relation

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} \wedge \frac{\partial \omega}{\partial u} = -\lambda' \circ \omega$$

où l'on a fait les identifications nécessaires.

La relation $\lambda \circ \Phi_\sigma = \lambda \cdot Q_\sigma$ donne par différentiation, en observant que $\lambda \circ \omega = 0$,

$$(\lambda' \circ \Phi_\sigma \circ \omega) (\Phi'_\sigma \circ \omega) V = (Q_\sigma \circ \omega) (\lambda' \circ \omega) \cdot V$$

où V est un vecteur arbitraire. Compte tenu des relations précédentes, ceci s'écrit encore

$$\det \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \circ \tilde{\sigma}, \frac{\partial \omega}{\partial u} \circ \tilde{\sigma}, (\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot V \right) = (Q_\sigma \circ \omega) \det \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}, \frac{\partial \omega}{\partial u}, V \right)$$

d'où

$$\begin{aligned} & \det \left((\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t}, (\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u}, (\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot V \right) \\ &= (\det \sigma) (Q_\sigma \circ \omega) \det \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}, \frac{\partial \omega}{\partial u}, V \right). \end{aligned}$$

Ceci montre l'égalité $\det(\Phi'_\sigma \circ \omega) = (\det \sigma) (Q_\sigma \circ \omega)$ en chaque point où le gradient de ω n'est pas nul.

THÉORÈME 2.

1. $Q_\sigma(0, 0, 0)$ vaut 0 ou 1 selon que $\det \sigma$ est pair ou impair.
2. $\Phi_\sigma(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ si et seulement si $\det \sigma$ est impair.
3. $Q'_\sigma(0, 0, 0) = 0$.
4. Si $\det \sigma$ est impair, $Q''_\sigma(0, 0, 0)$ est diagonal négatif.

Démonstration. Nous allons calculer $\Phi_\sigma(0, 0, z)$. Pour ce faire, considérons $\varphi \in \text{Hom}(F, SL(2, \mathbb{C}))$ tel que $\varphi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi(b) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^{-1} \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$, avec $\lambda + \lambda^{-1} = z$. On a évidemment $\varphi(a)^2 = \varphi(b)^2 = -1$ et, donc tout produit d'un certain nombre de $\varphi(a)$ et de $\varphi(b)$ est réductible à l'une des formes $\pm \varphi((ab)^n)$, $\pm \varphi((ab)^n a)$, $\pm \varphi((ba)^n)$ ou $\pm \varphi((ba)^n b)$ dont les traces respectives sont $\pm t_n(z)$, 0, $\pm t_n(z)$ et 0 (où t_n est un polynôme de Chebyshev de première espèce, cf. II).

Ceci nous conduit à définir le procédé suivant de réduction d'un élément de F : on remplace autant de fois qu'il est possible a^2 et b^2 par -1 . Ainsi le mot aba^2b^3 donne $-a$.

Réduisons ainsi les mots $\sigma(a)$ et $\sigma(b)$. On obtient respectivement $\varepsilon \bar{\sigma}(a)$ et $\eta \bar{\sigma}(b)$ où ε et η valent ± 1 . Nous pouvons dresser le tableau suivant qui donne, pour les différentes valeurs possibles de $\bar{\sigma}(a)$ et $\bar{\sigma}(b)$, en première ligne, $\Phi_\sigma(0, 0, z)$ et, en seconde, $Q_\sigma(0, 0, z)$ en termes des polynômes de Chebyshev t et u en la variable z .

$\bar{\sigma}(b)$ $\bar{\sigma}(a)$	$(ab)^n$	$(ab)^n a$	$(ba)^n$	$(ba)^n b$
$(ab)^m$	(t_m, t_n, t_{m+n}) 0	$(t_m, 0, 0)$ u_m^2	(t_m, t_n, t_{m-n}) 0	$(t_m, 0, 0)$ u_m^2
$(ab)^m a$	$(0, t_n, 0)$ u_n^2	$(0, 0, -t_{m-n})$ u_{m-n}^2	$(0, t_n, 0)$ u_n^2	$(0, 0, t_{m+n+1})$ u_{m+n+1}^2

$(ba)^m$	(t_m, t_n, t_{m-n}) 0	$(t_m, 0, 0)$ u_m^2	(t_m, t_n, t_{m+n}) 0	$(t_m, 0, 0)$ u_m^2
$(ba)^m b$	$(0, t_n, 0)$ u_n^2	$(0, 0, t_{m+n+1})$ u_{m+n+1}^2	$(0, t_n, 0)$ u_n^2	$(0, 0, -t_{m-n})$ u_{m-n}^2

On observe que $Q_\sigma(0, 0, z) = u_v(z)^2$ où $v = \det \bar{\sigma}$. Il est clair, par ailleurs, que $\det \sigma$ et $\det \bar{\sigma}$ ont même parité. La première assertion résulte alors de ce que $u_n(0) = \sin \frac{n\pi}{2}$.

La seconde assertion résulte de l'examen du tableau, compte tenu de ce que $t_n(0) = 2 \cos \frac{n\pi}{2}$.

La troisième assertion résulte simplement de la parité de u_n^2 .

Démontrons la dernière assertion. D'abord, il est facile de déterminer $\Phi_\sigma(x, 0, 0)$ et $\Phi_\sigma(0, y, 0)$. En effet soit $\tau = (a^{-1}, ab) \in \text{End } F$. On a $\Phi_\tau(x, y, z) = (x, z, y)$ et par conséquent $\Phi_{\sigma\tau}(x, y, z) = \Phi_\sigma(x, z, y)$, ce qui permet par le procédé précédent de déterminer $\Phi_\sigma(0, y, 0)$. De la même façon pour calculer $\Phi_\sigma(x, 0, 0)$ on utilise $\tau = (ab, b^{-1})$.

Supposons donc que $\det \sigma = 1 \pmod{2}$. Ce qui précède montre que deux des composantes de chacune des fonctions $\Phi_\sigma(x, 0, 0)$, $\Phi_\sigma(0, y, 0)$ et $\Phi_\sigma(0, 0, z)$ sont nulles alors que les troisièmes sont de la forme $\pm p_{n_1}(x)$, $\pm p_{n_2}(y)$, $\pm p_{n_3}(z)$ respectivement, les entiers n_1, n_2, n_3 étant impairs. Par ailleurs, en vertu du théorème 1, compte tenu de $Q_\sigma(0, 0, 0) = 1$, on a $\det \Phi'_\sigma(0, 0, 0) = 1 \pmod{2}$. Comme $p'_{n_i}(0) = n_i \sin \frac{n_i\pi}{2} \neq 0$ (pour $i = 1, 2, 3$),

on en déduit que la matrice $\Phi'_\sigma(0, 0, 0)$ a un terme non nul et un seul aussi bien dans chaque ligne que dans chaque colonne et que ses termes non nuls sont, aux signes près, n_1, n_2 et n_3 . Autrement dit ${}^t\Phi'_\sigma(0, 0, 0)\Phi'_\sigma(0, 0, 0)$ est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont des carrés de nombres impairs.

Différentions maintenant deux fois à l'origine la relation $\lambda \circ \Phi_\sigma = \lambda \cdot Q_\sigma$. On obtient

$${}^t\Phi'_\sigma(0, 0, 0)\lambda''(0)\Phi'_\sigma(0, 0, 0) = \lambda''(0) - 4Q''_\sigma(0, 0, 0)$$

en ayant tenu compte des relations $\lambda(0, 0, 0) = -4$ et $\lambda'(0, 0, 0) = 0$. La

conclusion résulte de $\lambda''(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Prenons un exemple: $\sigma = (aba^2b^2a, aba^3bab)$. Calculons $\Phi_\sigma(0, 0, z)$. La réduction de σ donne $(aba, -(ab)^3)$ donc

$$\Phi_\sigma(0, 0, z) = (0, -t_3(z), 0) = (0, 3z - z^3, 0)$$

et

$$Q_\sigma(0, 0, z) = u_3(z)^2 = (z^2 - 1)^2.$$

Pour calculer $\Phi_\sigma(x, 0, 0)$, multiplions σ par (ab, b^{-1}) , on obtient $(babab, bab)$, qui est réduit. Donc

$$\Phi_\sigma(x, 0, 0) = (0, 0, -t_1(x)) = (0, 0, -x)$$

et

$$Q_\sigma(x, 0, 0) = u_1(x)^2 = 1.$$

De façon analogue, on obtient

$$\Phi_\sigma(0, y, 0) = (p_3(y), 0, 0) = (y^3 - 3y, 0, 0)$$

et

$$Q_\sigma(0, y, 0) = (y^2 - 1)^2.$$

Ensuite on a

$$-2Q''_\sigma(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - I$$

d'où

$$Q''_\sigma(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

VI. CAS D'UN GROUPE LIBRE À PLUS DE DEUX GÉNÉRATEURS

Avant de passer à la généralisation partielle de ce qui précède, nous avons besoin d'un certain nombre de lemmes sur $SL(2, \mathbb{C})$.