

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	39 (1993)
<b>Heft:</b>	1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	 POLYNÔMES ASSOCIÉS AUX ENDOMORPHISMES DE GROUPES LIBRES
<b>Autor:</b>	Peyrière, Jacques
<b>Kapitel:</b>	IV. Etude des relations $\Phi_\sigma = \Phi_\tau$ et $Q_\sigma = 0$ .
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-60419">https://doi.org/10.5169/seals-60419</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

THÉORÈME 4.  $\mathcal{A}$  est le groupe engendré par  $\Phi_\alpha, \Phi_\beta, \Phi_\gamma$  et  $\rho$ .

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer de façon répétitive le lemme précédent pour se ramener au lemme 2.

THÉORÈME 5. L'ensemble des  $\sigma \in \text{Hom}(F, F)$  tels que  $Q_\sigma = 1$  est l'ensemble des automorphismes de  $F$ .

*Démonstration.* Dire que  $Q_\sigma = 1$  équivaut à dire  $\Phi_\sigma \in \mathcal{A}$ . Si  $\Phi_\sigma \in \mathcal{A}$ , le lemme 3 permet de montrer l'existence d'un  $\tau \in \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$  tel que  $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma \in \{\theta, \rho\}$ . Mais, en vertu des lemmes II.3 et II.4, on a alors  $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma = \text{id}$ . Il en résulte (théorème II.5) que  $\tau \circ \sigma$  est un automorphisme, donc aussi  $\sigma$ .

LEMME 6. Si  $i_w$  désigne l'automorphisme intérieur  $u \rightarrow wuw^{-1}$  de  $F$ . On a

$$i_a = \beta\alpha\beta\gamma\beta\gamma\alpha\beta \quad \text{et} \quad i_b = \alpha i_a \alpha .$$

*Démonstration.* Elle se fait par vérification directe.

THÉORÈME 7. L'ensemble des automorphismes de  $F$  est le groupe engendré par  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ .

*Démonstration.* Soit  $\sigma \in \text{Aut } F$ . Alors  $\Phi_\sigma \in \mathcal{A}$ . Comme précédemment, il existe  $\tau \in \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$  tel que  $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma = \text{id}$ . Le théorème II.1 montre alors  $\tau \circ \sigma$  est soit un automorphisme intérieur, soit un automorphisme intérieur composé avec  $(a^{-1}, b^{-1})$ , qui n'est autre que  $(\alpha\beta)^2$ . Le théorème résulte alors du lemme précédent.

*Remarque.* Ce théorème est un résultat ancien de Nielsen [5], [6], mais la démonstration que nous en donnons ne fait pas appel à la délicate théorie de la réduction de Nielsen.

#### IV. ETUDE DES RELATIONS $\Phi_\sigma = \Phi_\tau$ ET $Q_\sigma = 0$ .

Notons  $F^*$  l'ensemble des éléments  $w$  de  $F$  qui sont image d'un générateur par un automorphisme de  $F$ .

THÉORÈME 1. Soit  $\sigma$  et  $\tau$  deux endomorphismes de  $F$  tels que  $\sigma(a), \sigma(b)$  et  $\sigma(ab)$  soient dans  $F^*$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

- 1°)  $\Phi_\sigma = \Phi_\tau$   
 2°)  $\tau(a), \tau(b)$  et  $\tau(ab)$  sont conjugués respectivement à  $\sigma(a)$  ou  $\sigma(a)^{-1}, \sigma(b)$  ou  $\sigma(b)^{-1}, \sigma(ab)$  ou  $\sigma(ab)^{-1}$ .

*Démonstration.* Il est clair que la seconde assertion implique la première, et ce sans qu'il soit nécessaire de faire d'hypothèses sur  $\sigma$ .

Supposons que l'on ait  $\Phi_\sigma = \Phi_\tau$  et  $\sigma(a) = \mu(a), \sigma(b) = \nu(b)$  et  $\sigma(ab) = \xi(ab)$  (où  $\mu, \nu$  et  $\xi$  sont des automorphismes de  $F$ ). On a alors  $\Phi_{\mu^{-1}\sigma} = \Phi_{\mu^{-1}\tau}$ , d'où en vertu du lemme II.4,  $\mu^{-1}\tau(a) = ua^{\pm 1}u^{-1}$  pour un  $u \in F$ . Par suite  $\tau(a) = \mu(u)\sigma(a)^{\pm 1}\mu(u)^{-1}$ . On opère de même pour  $\tau(b)$  et  $\tau(ab)$ .

**THÉORÈME 2.** *Pour des automorphismes  $\sigma$  et  $\tau$  de  $F$ , les assertions suivantes sont équivalentes:*

- 1°)  $\Phi_\sigma = \Phi_\tau$   
 2°)  $\tilde{\sigma} = \pm \tilde{\tau}$   
 3°)  $\tau = \sigma i_w$  ou  $\tau = \sigma(\alpha\beta)^2 i_w$  pour un  $w \in F$ .

*Démonstration.* L'équivalence des assertions 1°) et 3°) est une simple reformulation du théorème II.1. L'équivalence de ces assertions avec la seconde résulte de la caractérisation, en termes de leurs matrices, des automorphismes intérieurs de  $F$  ([6]).

**PROPOSITION 3.** *Si  $\sigma$  est un endomorphisme de  $F$ , non injectif, il existe deux entiers  $m$  et  $n$  et un élément  $w$  de  $F$  tel que  $\sigma(a) = w^m$  et  $\sigma(b) = w^n$ .*

*Démonstration.* On utilise la théorie de la réduction de Nielsen ([6], [7]). Etant donné  $\sigma \in \text{Hom}(F, F)$  arbitraire, il existe un automorphisme  $\mu$  de  $F$  tel que l'une des éventualités suivantes se produise:

- 1°) Le couple  $(\sigma\mu(a), \sigma\mu(b))$  est réduit au sens de Nielsen,  
 2°)  $\sigma\mu(a)$  est réduit au sens de Nielsen et  $\sigma\mu(b) = e$ .  
 3°)  $\sigma\mu(a) = \sigma\mu(b) = e$ .

Dans le premier cas  $\sigma\mu$  est injectif, d'où la proposition.

**LEMME 4.** *Soit  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in (R[x, y, z])^3$  (où  $R$  est un domaine d'intégrité de caractéristique nulle) tel que l'on ait  $\lambda \circ \psi = 0$ . Alors, il existe  $\tau \in \text{Aut } F$  tel que  $\Phi_\tau \circ \psi$  ait sa première composante constante.*

*Démonstration.* On peut évidemment supposer que l'on a  $d^0\psi_1 \leq d^0\psi_2 \leq d^0\psi_3$ . La relation  $\lambda \circ \psi = 0$  s'écrit  $\psi_3(\psi_3 - \psi_1\psi_2) = 4 - \psi_1^2 - \psi_2^2$ , d'où l'on déduit  $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) \leq d^0\psi_2$ . Supposons que l'on ait  $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) \geq d^0\psi_3$ . On a alors  $d^0\psi_2 = d^0\psi_3$  et  $d^0\psi_1 + d^0\psi_2 + d^0\psi_3 \leq 2d^0\psi_3$  et, donc,  $\psi_1 = c \in R$ . Par une procédure de descente analogue à celle de la démonstration du théorème II.4, par composition par divers  $\Phi_\tau$  on peut faire décroître  $\deg \psi$  tant que l'une de ses composantes n'est pas constante.

THÉORÈME 5. *Pour  $\sigma \in \text{Hom}(F, F)$ ,  $Q_\sigma \equiv 0$  si et seulement si  $\sigma$  n'est pas injectif.*

*Démonstration.* Supposons  $\sigma$  non injectif. En vertu de la proposition 3, il existe  $\mu \in \text{Aut } F$  tel que  $\sigma\mu(b) = e$ . Or, on sait que  $Q_{\sigma\mu} = Q_\mu Q_\sigma \circ \Phi_\mu$ . Or, il est facile de vérifier que  $Q_{\sigma\mu} = 0$ . Comme  $Q_\mu \equiv 1$ , cela implique  $Q_\sigma \equiv 0$ .

Supposons maintenant que l'on ait  $Q_\sigma \equiv 0$ . En vertu du lemme précédent, il existe  $\tau \in \text{Aut } F$  tel que la première composante de  $\Phi_{\tau\sigma}$  soit constante. Le lemme II.2 montre alors que  $\tau\sigma(a) = e$ , ce qui prouve que  $\sigma$  n'est pas injective.

## V. AUTRES PROPRIÉTÉS DES POLYNÔMES $Q_\sigma$

THÉORÈME 1. *Pour tout  $\sigma \in \text{End } F$ , on a les faits suivants:*

- 1°)  $Q_\sigma(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta) = (\det \sigma)^2$  pour tous  $\varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}$ .
- 2°)  $\lambda$  divise le polynôme  $\det \Phi'_\sigma - (\det \sigma)Q_\sigma$ .

*Démonstration.* Observons d'abord que si  $p$  et  $q$  sont deux entiers rationnels on a

$$\begin{aligned} P_{a^p b^q}(x, y, z) &= zu_p(x)u_q(y) - xu_p(x)u_{q-1}(y) - yu_{p-1}(x)u_q(y) \\ &\quad + 2u_{p-1}(x)u_{q-1}(y). \end{aligned}$$

Si  $\varepsilon$  et  $\eta$  valent  $\pm 1$ , il est facile de vérifier que

$$P_{a^p b^q}(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta) = 2\varepsilon^p\eta^q$$

et de calculer le gradient de  $P_{a^p b^q}$ :

$$P'_{a^p b^q}(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta) = (\varepsilon p(p-q), \eta q(q-p), \varepsilon\eta pq)\varepsilon^p\eta^q.$$

Considérons maintenant un élément de  $\sigma$  de  $\text{End } F$  dont la matrice est  $\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ . Ce qui précède montre que le point  $(2, 2, 2)$  est point fixe pour  $\Phi_\sigma$  et que l'ensemble  $\{(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta); \varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}\}$  est globalement invariant par  $\Phi_\sigma$ .