

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 39 (1993)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** POLYNÔMES ASSOCIÉS AUX ENDOMORPHISMES DE GROUPES LIBRES  
**Autor:** Peyrière, Jacques  
**Kapitel:** III. Applications polynomiales laissant invariant Caractérisation des tels que  $Q_{\sigma} = 1$   
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-60419>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

On sait par ailleurs (proposition I.9) que  $\lambda$  divise  $P_{\sigma(ab)} - P_{a^\varepsilon b^\eta}$ . Comme  $P_{\sigma(ab)} = z$  et  $P_{a^{-1}b} = P_{ab^{-1}} = xy - z$  on a  $\varepsilon = \eta$ . Quitte à composer avec l'involution  $(a^{-1}, b^{-1})$ , on peut supposer que l'on a  $\varepsilon = \eta = 1$ .

Supposons que les mots  $uau^{-1}$  et  $vbv^{-1}$  soient réduits. Si  $u = v = e$ , il n'y a rien à démontrer. Sinon, supposons que  $|u| \geq |v|$  (où  $|u|$  désigne la longueur de  $u$ ). On a alors  $u = u'b^n$  avec  $n \neq 0$ , la dernière lettre de  $u'$  étant  $a$ , si  $|u'| > 0$ . Dans ces conditions on a

$$\sigma(ab) = u'b^n ab^{-n} u'^{-1} vbv^{-1}$$

d'où

$$z = P_{(ab^{-n} u'^{-1} vbv^{-1} u' b^n)}.$$

Utilisant une nouvelle fois le lemme 3, on obtient que  $u'^{-1}v = b^k$ . L'irréductibilité de  $vbv^{-1}$  implique alors  $u' = v$ . Ceci montre que  $\sigma$  est un automorphisme intérieur.

### III. APPLICATIONS POLYNOMIALES LAISSANT $\lambda$ INVARIANT

#### CARACTÉRISATION DES $\sigma$ TELS QUE $Q_\sigma = 1$

On désigne par  $R$  un domaine d'intégrité de caractéristique nulle et par  $\mathcal{A}$  l'ensemble des  $\psi \in (R[x, y, z])^3$  tels que  $\lambda \circ \psi = \lambda$ .

L'ensemble  $\mathcal{A}$  contient  $\{\Phi_\sigma; \sigma \in \text{aut } F\}$ . Il sera commode de considérer les éléments suivants de  $\text{aut } F$ :

$$\alpha = (b, a), \quad \beta = (a, b^{-1}), \quad \gamma = (ab, b^{-1}).$$

Les  $\Phi$  correspondants sont

$$\Phi_\alpha(x, y, z) = (y, x, z)$$

$$\Phi_\beta(x, y, z) = (x, y, xy - z)$$

$$\Phi_\gamma(x, y, z) = (z, y, x).$$

On considérera aussi les applications polynomiales suivantes:

$$\rho(x, y, z) = (-x, -y, z)$$

et

$$\theta(x, y, z) = (-x, y, -z).$$

Ces applications polynomiales sont également dans  $\mathcal{A}$ .

Nous allons montrer que  $\mathcal{A}$  est engendré par  $\Phi_\alpha, \Phi_\beta, \Phi_\gamma, \rho$  et  $\theta$ .

LEMME 1. Si  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$  appartient à  $\mathcal{A}$ , alors on a, pour  $i = 1, 2, 3$ ,  $d^0\psi_i \geq 1$ .

*Démonstration.* Si, par exemple,  $\psi_3$  était constant, égal à  $c$ , on aurait

$$\psi_1^2 + \psi_2^2 - c\psi_1\psi_2 = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - c^2.$$

Or, le premier membre de cette expression est réductible dans un corps, extension convenable de  $R$ , alors que le second membre ne l'est pas.

Notons  $\deg \psi$  la somme  $d^0\psi_1 + d^0\psi_2 + d^0\psi_3$  et posons

$$\mathcal{L} = \{\psi \in \mathcal{A}; \deg \psi = 3\}.$$

LEMME 2.  $\mathcal{L}$  est le groupe engendré par  $\Phi_\alpha, \Phi_\gamma$  et  $\rho$ .

*Démonstration.* Appelons les variables  $x_1, x_2, x_3$  au lieu de  $x, y, z$ . Soit  $\psi \in L$ . On a  $\psi_j(x) = l_j + u_j$  où  $l_j$  est un polynôme homogène de degré 1 et  $u_j \in R$ . On a

$$\sum_{j=1}^3 (l_j + u_j)^2 - (l_1 + u_1)(l_2 + u_2)(l_3 + u_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2x_3.$$

L'identification des termes de degré 3 donne  $l_j = v_j x_{\tau(j)}$  où  $v_j \in R$ , et  $\tau \in \mathcal{S}_3$  et  $v_1v_2v_3 = 1$ . L'identification des termes quadratiques donne alors  $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ ,  $v_1^2 = v_2^2 = v_3^2 = 1$ .

Il est dès lors facile de se convaincre que  $\psi$  est dans le groupe engendré par  $\Phi_\alpha, \Phi_\delta$  et  $\rho$ .

LEMME 3. Soit  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in \mathcal{A}$  tel que  $\deg \psi > 3$ . Alors, il existe  $\sigma \in \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ , le groupe engendré par  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ , tel que  $\deg(\Phi_\sigma \circ \psi) < \deg \psi$ .

*Démonstration.* Puisque  $\Phi_\alpha$  et  $\Phi_\gamma$  sont des transpositions distinctes de deux composantes, quitte à remplacer  $\psi$  par  $\Phi_\sigma \circ \psi$ , avec  $\sigma \in \langle \alpha, \gamma \rangle$ , on peut supposer que  $d^0\psi_3 \geq d^0\psi_2 \geq d^0\psi_1 \geq 1$ .

Puisque  $\deg \psi > 3$ , on a  $d^0\psi_3 \geq 2$ . Or  $(\psi_3 - \psi_1\psi_2)\psi_3 + \psi_2^2 + \psi_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 - xyz$ . Si l'on avait  $d^0\psi_3 \neq d^0\psi_1\psi_2$  on aurait

$$3 = \sup(d^0\psi_3, d^0\psi_1\psi_2) + d^0\psi_3 \geq 4.$$

On a donc  $d^0\psi_3 = d^0\psi_1\psi_2$ , d'où  $d^0\psi_3 > d^0\psi_2$ . Si l'on avait  $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) = d^0\psi_3$ , on aurait  $2d^0\psi_3 = 3$ , donc on a  $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) < d^0\psi_3$ . Ceci montre que  $\deg \Phi_\beta \circ \psi < \deg \psi$ . Ceci achève la démonstration du lemme.

THÉORÈME 4.  $\mathcal{A}$  est le groupe engendré par  $\Phi_\alpha, \Phi_\beta, \Phi_\gamma$  et  $\rho$ .

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer de façon répétitive le lemme précédent pour se ramener au lemme 2.

THÉORÈME 5. L'ensemble des  $\sigma \in \text{Hom}(F, F)$  tels que  $Q_\sigma = 1$  est l'ensemble des automorphismes de  $F$ .

*Démonstration.* Dire que  $Q_\sigma = 1$  équivaut à dire  $\Phi_\sigma \in \mathcal{A}$ . Si  $\Phi_\sigma \in \mathcal{A}$ , le lemme 3 permet de montrer l'existence d'un  $\tau \in \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$  tel que  $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma \in \{\theta, \rho\}$ . Mais, en vertu des lemmes II.3 et II.4, on a alors  $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma = \text{id}$ . Il en résulte (théorème II.5) que  $\tau \circ \sigma$  est un automorphisme, donc aussi  $\sigma$ .

LEMME 6. Si  $i_w$  désigne l'automorphisme intérieur  $u \rightarrow wuw^{-1}$  de  $F$ . On a

$$i_a = \beta\alpha\beta\gamma\beta\gamma\alpha\beta \quad \text{et} \quad i_b = \alpha i_a \alpha.$$

*Démonstration.* Elle se fait par vérification directe.

THÉORÈME 7. L'ensemble des automorphismes de  $F$  est le groupe engendré par  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ .

*Démonstration.* Soit  $\sigma \in \text{Aut } F$ . Alors  $\Phi_\sigma \in \mathcal{A}$ . Comme précédemment, il existe  $\tau \in \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$  tel que  $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma = \text{id}$ . Le théorème II.1 montre alors  $\tau \circ \sigma$  est soit un automorphisme intérieur, soit un automorphisme intérieur composé avec  $(a^{-1}, b^{-1})$ , qui n'est autre que  $(\alpha\beta)^2$ . Le théorème résulte alors du lemme précédent.

*Remarque.* Ce théorème est un résultat ancien de Nielsen [5], [6], mais la démonstration que nous en donnons ne fait pas appel à la délicate théorie de la réduction de Nielsen.

#### IV. ETUDE DES RELATIONS $\Phi_\sigma = \Phi_\tau$ ET $Q_\sigma = 0$ .

Notons  $F^*$  l'ensemble des éléments  $w$  de  $F$  qui sont image d'un générateur par un automorphisme de  $F$ .

THÉORÈME 1. Soit  $\sigma$  et  $\tau$  deux endomorphismes de  $F$  tels que  $\sigma(a), \sigma(b)$  et  $\sigma(ab)$  soient dans  $F^*$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes: