Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: POLYNÔMES ASSOCIÉS AUX ENDOMORPHISMES DE GROUPES LIBRES

Autor: Peyrière, Jacques

Kapitel: III. Applications polynomiales laissant invariant Caractérisation des tels que $Q_\sigma = 1$

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60419

On sait par ailleurs (proposition I.9) que λ divise $P_{\sigma(ab)} - P_{a^\varepsilon b^\eta}$. Comme $P_{\sigma(ab)} = z$ et $P_{a^{-1}b} = P_{ab^{-1}} = xy - z$ on a $\varepsilon = \eta$. Quitte à composer avec l'involution (a^{-1}, b^{-1}), on peut supposer que l'on a $\varepsilon = \eta = 1$.

Supposons que les mots uau^{-1} et vbv^{-1} soient réduits. Si $u = v = e$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, supposons que $|u| \geqslant |v|$ (où $|u|$ désigne la longueur de u). On a alors $u = u'b^n$ avec $n \neq 0$, la dernière lettre de u' étant a, si $|u'| > 0$. Dans ces conditions on a

$$\sigma(ab) = u'b^n ab^{-n}u'^{-1}vbv^{-1}$$

d'où

$$z = P_{(ab^{-n}u'^{-1}vbv^{-1}u'b^n)} .$$

Utilisant une nouvelle fois le lemme 3, on obtient que $u'^{-1}v = b^k$. L'irréductibilité de vbv^{-1} implique alors $u' = v$. Ceci montre que σ est un automorphisme intérieur.

III. Applications polynomiales laissant λ invariant Caractérisation des σ tels que $Q_\sigma = 1$

On désigne par R un domaine d'intégrité de caractéristique nulle et par $\mathscr{A}$ l'ensemble des $\psi \in (R[x, y, z])^3$ tels que $\lambda \circ \psi = \lambda$.

L'ensemble $\mathscr{A}$ contient $\{\Phi_\sigma; \sigma \in \operatorname{aut} F\}$. Il sera commode de considérer les éléments suivants de $\operatorname{aut} F$:

$$\alpha = (b, a) , \quad \beta = (a, b^{-1}) , \quad \gamma = (ab, b^{-1}) .$$

Les Φ correspondants sont

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(x, y, z) &= (y, x, z) \\ \Phi_\beta(x, y, z) &= (x, y, xy - z) \\ \Phi_\gamma(x, y, z) &= (z, y, x) . \end{aligned}$$

On considérera aussi les applications polynomiales suivantes:

$$\rho(x, y, z) = (-x, -y, z)$$

et

$$\theta(x, y, z) = (-x, y, -z) .$$

Ces applications polynomiales sont également dans $\mathscr{A}$.

Nous allons montrer que $\mathscr{A}$ est engendré par Φ_α, Φ_β, Φ_γ, ρ et θ.

LEMME 1. *Si* $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ *appartient à* $\mathscr{A}$, *alors on a, pour* $i = 1, 2, 3$, $d^0\psi_i \geqslant 1$.

Démonstration. Si, par exemple, ψ_3 était constant, égal à c, on aurait

$$\psi_1^2 + \psi_2^2 - c\psi_1\psi_2 = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - c^2 .$$

Or, le premier membre de cette expression est réductible dans un corps, extension convenable de R, alors que le second membre ne l'est pas.

Notons $\deg \psi$ la somme $d^0\psi_1 + d^0\psi_2 + d^0\psi_3$ et posons

$$\mathscr{L} = \{\psi \in \mathscr{A} ; \quad \deg \psi = 3\} .$$

LEMME 2. $\mathscr{L}$ *est le groupe engendré par* Φ_α, Φ_γ *et* ρ.

Démonstration. Appelons les variables x_1, x_2, x_3 au lieu de x, y, z. Soit $\psi \in L$. On a $\psi_j(x) = l_j + u_j$ où l_j est un polynôme homogène de degré 1 et $u_j \in R$. On a

$$\sum_{j=1}^{3} (l_j + u_j)^2 - (l_1 + u_1)(l_2 + u_2)(l_3 + u_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2x_3 .$$

L'identification des termes de degré 3 donne $l_j = v_j x_{\tau(j)}$ où $v_j \in R$, et $\tau \in \mathscr{S}_3$ et $v_1v_2v_3 = 1$. L'identification des termes quadratiques donne alors $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, $v_1^2 = v_2^2 = v_3^2 = 1$.

Il est dès lors facile de se convaincre que ψ est dans le groupe engendré par Φ_α, Φ_δ et ρ.

LEMME 3. *Soit* $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in \mathscr{A}$ *tel que* $\deg \psi > 3$. *Alors, il existe* $\sigma \in <\alpha, \beta, \gamma>$, *le groupe engendré par* α, β *et* γ, *tel que* $\deg (\Phi_\sigma \circ \psi) < \deg \psi$.

Démonstration. Puisque Φ_α et Φ_γ sont des transpositions distinctes de deux composantes, quitte à remplacer ψ par $\Phi_\sigma \circ \psi$, avec $\sigma \in <\alpha, \gamma>$, on peut supposer que $d^0\psi_3 \geqslant d^0\psi_2 \geqslant d^0\psi_1 \geqslant 1$.

Puisque $\deg \psi > 3$, on a $d^0\psi_3 \geqslant 2$. Or $(\psi_3 - \psi_1\psi_2)\psi_3 + \psi_2^2 + \psi_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 - xyz$. Si l'on avait $d^0\psi_3 \neq d^0\psi_1\psi_2$ on aurait

$$3 = \sup(d^0\psi_3, d^0\psi_1\psi_2) + d^0\psi_3 \geqslant 4 .$$

On a donc $d^0\psi_3 = d^0\psi_1\psi_2$, d'où $d^0\psi_3 > d^0\psi_2$. Si l'on avait $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) = d^0\psi_3$, on aurait $2d^0\psi_3 = 3$, donc on a $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) < d^0\psi_3$. Ceci montre que $\deg \Phi_\beta \circ \psi < \deg \psi$. Ceci achève la démonstration du lemme.

THÉORÈME 4. *$\mathscr{A}$ est le groupe engendré par* $\Phi_\alpha, \Phi_\beta, \Phi_\gamma$ *et* ρ.

Démonstration. Il suffit d'appliquer de façon répétitive le lemme précédent pour se ramener au lemme 2.

THÉORÈME 5. *L'ensemble des* $\sigma \in \mathrm{Hom}(F, F)$ *tels que* $Q_\sigma = 1$ *est l'ensemble des automorphismes de* F.

Démonstration. Dire que $Q_\sigma = 1$ équivaut à dire $\Phi_\sigma \in \mathscr{A}$. Si $\Phi_\sigma \in \mathscr{A}$, le lemme 3 permet de montrer l'existence d'un $\tau \in < \alpha, \beta, \gamma >$ tel que $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma \in \{\theta, \rho\}$. Mais, en vertu des lemmes II.3 et II.4, on a alors $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma = \mathrm{id}$. Il en résulte (théorème II.5) que $\tau \circ \sigma$ est un automorphisme, donc aussi σ.

LEMME 6. *Si* i_w *désigne l'automorphisme intérieur* $u \to wuw^{-1}$ *de* F. *On a*

$$i_a = \beta\alpha\beta\gamma\beta\gamma\alpha\beta \quad et \quad i_b = \alpha i_a \alpha \, .$$

Démonstration. Elle se fait par vérification directe.

THÉORÈME 7. *L'ensemble des automorphismes de* F *est le groupe engendré par* α, β *et* γ.

Démonstration. Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}\, F$. Alors $\Phi_\sigma \in \mathscr{A}$. Comme précédemment, il existe $\tau \in < \alpha, \beta, \gamma >$ tel que $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma = \mathrm{id}$. Le théorème II.1 montre alors $\tau \circ \sigma$ est soit un automorphisme intérieur, soit un automorphisme intérieur composé avec (a^{-1}, b^{-1}), qui n'est autre que $(\alpha\beta)^2$. Le théorème résulte alors du lemme précédent.

Remarque. Ce théorème est un résultat ancien de Nielsen [5], [6], mais la démonstration que nous en donnons ne fait pas appel à la délicate théorie de la réduction de Nielsen.

IV. ETUDE DES RELATIONS $\Phi_\sigma = \Phi_\tau$ ET $Q_\sigma = 0$.

Notons F^* l'ensemble des éléments w de F qui sont image d'un générateur par un automorphisme de F.

THÉORÈME 1. *Soit* σ *et* τ *deux endomorphismes de* F *tels que* $\sigma(a), \sigma(b)$ *et* $\sigma(ab)$ *soient dans* F^*. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*