PROPOSITION 10. *Si* $\sigma \in \mathrm{Aut}(F)$, *alors* $\det \Phi'_\sigma = \pm 1$.

Démonstration. Différentions la relation $\Phi_{\sigma^{-1}} \circ \Phi_\sigma = \mathrm{id}$ et prenons les déterminants. On obtient

$$\det(\Phi'_{\sigma^{-1}} \circ \Phi_\sigma) \det(\Phi'_\sigma) = 1 \, .$$

Comme ces déterminants sont des polynômes à coefficients entiers, ils sont nécessairement constants, égaux à ± 1.

LEMME 11. *Pour tout* $\sigma \in \mathrm{Hom}(F, F)$, *on a* $Q_\sigma(0, 0, 0) = 0$ *ou* 1.

Démonstration. Il suffit de considérer $\varphi \in \mathrm{Hom}(F, SL(2, \mathbf{C}))$ tel que $\varphi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi(b) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Nous donnerons plus loin un résultat plus précis que celui-ci.

PROPOSITION 12. *Si* $\sigma \in \mathrm{Aut}\, F$, *on a* $Q_\sigma = 1$.

Démonstration. Ceci résulte de la proposition 8 et du lemme 11.

II. DÉTERMINATION DU NOYAU DE Φ

Comme l'ont observé Kolar et Ali [3], les polynômes de Chebyschev interviennent naturellement dans ce contexte.

Considérons les deux suites de polynômes $\{t_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ et $\{u_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ satisfaisant la même relation de récurrence

$$t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = x t_n(x)$$
$$u_{n+1}(x) + u_{n-1}(x) = x u_n(x)$$

avec les conditions initiales

$$t_0(x) = 2 \, , \quad t_1(x) = x \, , \quad u_0(x) = 0 \, , \quad u_1(x) = 1 \, .$$

Il est facile de vérifier les faits suivants:

$$t_{-n} = t_n \, , \quad d^0 t_n = |n|$$
$$u_{-n} = -u_n \, , \quad d^0 u_n = n - 1 \quad \text{si} \quad n \geqslant 1$$
$$t_n(2\cos\varphi) = 2\cos n\varphi$$
$$u_n(2\cos\varphi) = \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$$
$$t_n(x) = x u_n(x) - 2u_{n-1}(x) \, .$$

L'intérêt pour nous de ces polynômes vient du lemme suivant dont la démonstration par récurrence est immédiate.

LEMME 1. *Si* A *est une matrice carrée telle que* $A^2 = xA - 1$, *alors, pour tout* $n \in \mathbf{Z}$, *on a*

$$A^n = u_n(x)A - u_{n-1}(x)$$

et, si A *est une matrice* $2 \times 2, \operatorname{tr} A^n = t_n(x)$.

LEMME 2. *Soit* $w = a^{m_1}b^{n_1}a^{m_2}b^{n_2}\cdots a^{m_k}b^{n_k}$ *un élément de* F. *On suppose que, si* $k > 0$, *on a* $m_1m_2\cdots m_kn_1\cdots n_k \neq 0$, *(si* $k = 0$, *par convention* $w = e$*). Alors* $d_z^0 P_w = k$, *(où* d_z^0 *désigne le degré par rapport à la variable* z*).*

Démonstration. Elle se fait par récurrence sur k. Le lemme est vrai pour $k = 0$. Supposons-le vrai pour $k \leqslant l - 1$.

Soit $w = a^{m_1}b^{n_1}a^{m_2}b^{n_2}\cdots a^{m_l}b^{n_l} = w_1a^{m_l}b^{n_l}$. On a, si $T\varphi = (x, y, z)$,

$$\varphi(w) = \varphi(w_1)\,[u_{m_l}(x)\varphi(a) - u_{m_l-1}(x)]\,[u_{n_l}(y)\varphi(b) - u_{n_l-1}(y)]\ .$$

La trace de $\varphi(w)$ est donc combinaison linéaire à coefficients polynômiaux en x et y des traces de $\varphi(w_1ab)$, $\varphi(w_1a)$, $\varphi(w_1b)$ et $\varphi(w_1)$. Puisque, pour calculer des traces de produits, on peut opérer des permutations circulaires, l'hypothèse de récurrence montre que les traces de $\varphi(w_1a)$, $\varphi(w_1b)$ et $\varphi(w_1)$ ont un degré en z inférieur ou égal à $l - 1$.

Ainsi donc le degré en z du polynôme

$$\operatorname{tr}\varphi(w) - \operatorname{tr}(\varphi(w_1ab))\,u_{m_l}(x)\,u_{n_l}(y)$$

est strictement inférieur à l.

Répétant le même argument aux autres facteurs de w, on obtient que le degré en z du polynôme

$$\operatorname{tr}\varphi(w) - \operatorname{tr}(\varphi[(ab)^l])\prod_{j=1}^{l}[u_{m_j}(x)\,u_{n_j}(y)]$$

est au plus $l - 1$.

Mais $\operatorname{tr}\varphi(ab)^l = t_l(z)$ est un polynôme en z de degré l. Ceci achève la démonstration.

LEMME 3. *Si* $w \in F$ *est tel que* $P_w = \alpha z\,(\alpha \in \mathbf{Z})$, *alors* $\alpha = 1$ *et l'on a* $w = uabu^{-1}$ *ou* $w = ua^{-1}b^{-1}u^{-1}$ *pour un* $u \in F$.

Démonstration. Si $\alpha = 0$, le lemme précédent montre que la réduction cyclique de w est e, a^m ou b^n. Dans aucun de ces cas on obtient $P_w = 0$. Donc $\alpha \neq 0$.

Le lemme précédent montre alors que la réduction cyclique de w est $a^m b^n$ (avec $mn \neq 0$). Alors le lemme 1 montre que l'on a

$$P_w(x, y, z) = u_m(x)u_n(y)z - yu_{m-1}(x)u_n(y) - xu_m(x)u_{n-1}(y) \\ + 2u_{m-1}(x)u_{n-1}(y) .$$

Or $u_m(x)u_n(y) = \alpha$ implique $|m| = |n| = 1$ et $\alpha = mn$. Si $mn = -1$, alors l'un des deux termes $yu_{m-1}(x)u_n(y)$ ou $xu_m(x)u_{n-1}(y)$ reste seul, ce qui est impossible. Donc $m = n = \pm 1$, d'où le lemme.

LEMME 4. *Soit* $w \in F$. *Alors*

1°) *Si* $P_w = \alpha x$, *on a* $\alpha = 1$ *et* $w = uau^{-1}$ *ou* $w = ua^{-1}u^{-1}$.

2°) *Si* $P_w = \alpha y$, *on a* $\alpha = 1$ *et* $w = ubu^{-1}$ *ou* $w = ub^{-1}u^{-1}$.

Démonstration. Supposons que l'on ait $P_w = \alpha x$. Considérons l'élément $\sigma \in \operatorname{Hom}(F, F)$ ainsi défini: $\sigma(a) = ab$, $\sigma(b) = b^{-1}$. On a $\Phi_\sigma(x, y, z) = (z, y, x)$, donc, en vertu de la proposition I.3, on a $P_{\sigma(w)}(x, y, z) = P_w \circ \Phi_\sigma(x, y, z) = \alpha z$. On en déduit (lemme précédent) que $\alpha = 1$ et que $\sigma(w) = uabu^{-1}$ ou $\sigma(w) = ua^{-1}b^{-1}u^{-1}$. Mais σ est un isomorphisme: $\sigma^{-1}(a) = ab$, $\sigma^{-1}(b) = b^{-1}$. On a donc $w = \sigma^{-1}(u)a\sigma^{-1}(u^{-1})$ ou $w = \sigma^{-1}(u)b^{-1}a^{-1}b\sigma^{-1}(u^{-1})$.

Pour démontrer la seconde assertion, on utilise de la même façon l'isomorphisme (a^{-1}, ab).

THÉORÈME 5. *Pour* $\sigma \in \operatorname{Hom}(F, F)$ *les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1°) $\Phi_\sigma = \mathrm{id}$

2°) σ *est soit un automorphisme intérieur, soit un automorphisme intérieur composé avec l'involution* (a^{-1}, b^{-1}).

Démonstration. Il est clair que la seconde propriété implique la première. Supposons que l'on ait $\Phi_\sigma = \mathrm{id}$. Il résulte du lemme précédent que l'on a

$$\sigma(a) = ua^\varepsilon u^{-1} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1 \text{ et } u \in F$$

et

$$\sigma(b) = vb^\eta v^{-1} \quad \text{avec} \quad \eta = \pm 1 \text{ et } v \in F .$$

On sait par ailleurs (proposition I.9) que λ divise $P_{\sigma(ab)} - P_{a^\varepsilon b^\eta}$. Comme $P_{\sigma(ab)} = z$ et $P_{a^{-1}b} = P_{ab^{-1}} = xy - z$ on a $\varepsilon = \eta$. Quitte à composer avec l'involution (a^{-1}, b^{-1}), on peut supposer que l'on a $\varepsilon = \eta = 1$.

Supposons que les mots uau^{-1} et vbv^{-1} soient réduits. Si $u = v = e$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, supposons que $|u| \geqslant |v|$ (où $|u|$ désigne la longueur de u). On a alors $u = u'b^n$ avec $n \neq 0$, la dernière lettre de u' étant a, si $|u'| > 0$. Dans ces conditions on a

$$\sigma(ab) = u'b^n ab^{-n} u'^{-1} vbv^{-1}$$

d'où

$$z = P_{(ab^{-n}u'^{-1}vbv^{-1}u'b^n)} \,.$$

Utilisant une nouvelle fois le lemme 3, on obtient que $u'^{-1}v = b^k$. L'irréductibilité de vbv^{-1} implique alors $u' = v$. Ceci montre que σ est un automorphisme intérieur.

III. Applications polynomiales laissant λ invariant
Caractérisation des σ tels que $Q_\sigma = 1$

On désigne par R un domaine d'intégrité de caractéristique nulle et par $\mathscr{A}$ l'ensemble des $\psi \in (R[x, y, z])^3$ tels que $\lambda \circ \psi = \lambda$.

L'ensemble $\mathscr{A}$ contient $\{\Phi_\sigma ; \sigma \in \operatorname{aut} F\}$. Il sera commode de considérer les éléments suivants de $\operatorname{aut} F$:

$$\alpha = (b, a) \,, \quad \beta = (a, b^{-1}) \,, \quad \gamma = (ab, b^{-1}) \,.$$

Les Φ correspondants sont

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(x, y, z) &= (y, x, z) \\ \Phi_\beta(x, y, z) &= (x, y, xy - z) \\ \Phi_\gamma(x, y, z) &= (z, y, x) \,. \end{aligned}$$

On considérera aussi les applications polynomiales suivantes:

$$\rho(x, y, z) = (-x, -y, z)$$

et

$$\theta(x, y, z) = (-x, y, -z) \,.$$

Ces applications polynomiales sont également dans $\mathscr{A}$.

Nous allons montrer que $\mathscr{A}$ est engendré par Φ_α, Φ_β, Φ_γ, ρ et θ.