

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 39 (1993)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** POLYNÔMES ASSOCIÉS AUX ENDOMORPHISMES DE GROUPES LIBRES  
**Autor:** Peyrière, Jacques  
**Kapitel:** I. Introduction  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-60419>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Cet article répond à certaines questions posées dans [8]. Pour la commodité du lecteur, dans la première partie, les résultats de [8] sont repris, et dans certains cas précisés.

## I. INTRODUCTION

On désigne dans les sections 1, 2, 3, 4 et 5 par  $F$  le groupe libre à deux générateurs,  $a$  et  $b$ . On note  $\text{tr } A$  la trace de la matrice carrée  $A$ . Si  $\varphi$  est un homomorphisme de  $F$  dans  $SL(2, \mathbb{C})$ , on note  $T\varphi$  le triplet  $(\text{tr } \varphi(a), \text{tr } \varphi(b), \text{tr } \varphi(ab))$ .

L'image de  $T$  est  $\mathbb{C}^3$  tout entier: pour s'en persuader, il suffit de considérer les  $\varphi$  tels que  $\varphi(a) = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\varphi(b) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda^{-1} & y \end{pmatrix}$ .

Si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont des endomorphismes de  $F$ , on pose  $\sigma\sigma' = \sigma' \circ \sigma$ . On identifiera un élément  $\sigma$  de  $\text{Hom}(F, F)$  au couple  $(\sigma(a), \sigma(b)) \in F \times F$ .

Si  $w$  est un élément de  $F$ , on désignera par  $\tilde{w}$  l'élément de  $\mathbb{Z}^2$ , image de  $w$  par l'homomorphisme d'abélianisation. Si  $\sigma$  est un endomorphisme de  $F$ , il définit, par abélianisation, un endomorphisme de  $\mathbb{Z}^2$  dont nous désignerons par  $\tilde{\sigma}$  la matrice transposée. En d'autres termes,  $\tilde{\sigma}$  est la matrice carrée indexée par  $\{a, b\} \times \{a, b\}$  dont les coefficients d'interprètent de la façon suivante: si  $u$  et  $v$  appartiennent à  $\{a, b\}$ ,  $\tilde{\sigma}_{u,v}$  = somme des puissances de la lettre  $v$  dans  $\sigma(u)$ . On a évidemment  $(\sigma\sigma')^{\sim} = \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}'$ .

On note  $\lambda$  le polynôme  $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 4$ . On sait que, pour  $\varphi \in \text{Hom}(F, SL(2, \mathbb{C}))$ ,  $\lambda(T\varphi)$  est nul si et seulement si  $\varphi(a)$  et  $\varphi(b)$  ont une direction propre commune.

LEMME 1. Soit  $A$  et  $B$  deux éléments de  $SL(2, \mathbb{C})$ . On a

$$AB + BA = \text{tr}(AB) - (\text{tr } A)(\text{tr } B) + A \text{tr } B + B \text{tr } A.$$

*Démonstration.* Le théorème de Cayley-Hamilton donne les relations suivantes:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \text{tr } A - A \\ B^{-1} &= \text{tr } B - B \\ (AB)^2 &= AB \text{tr}(AB) - 1. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} BA &= A^{-1}ABABB^{-1} \\ &= A^{-1}(AB \text{tr}(AB) - 1)B^{-1} \\ &= \text{tr}(AB) - (\text{tr } A - A)(\text{tr } B - B) \\ &= \text{tr}(AB) - (\text{tr } A)(\text{tr } B) + A \text{tr } B + B \text{tr } A - AB. \end{aligned}$$

LEMME 2. Soit  $w \in F$ . Il existe alors quatre polynômes,

$$P_w^{(j)} \in \mathbb{Z}[x, y, z] \quad (j = 1, 2, 3, 4),$$

tels que, pour tout  $\varphi \in \text{Hom}(F, SL(2, \mathbb{C}))$ , on ait

$$\varphi(w) = P_w^{(1)}(T\varphi) + P_w^{(2)}(T\varphi)\varphi(a) + P_w^{(3)}(T\varphi)\varphi(b) + P_w^{(4)}(T\varphi)\varphi(ab).$$

*Démonstration.* Posons, pour simplifier,  $\varphi(a) = A$ ,  $\varphi(b) = B$  et  $T\varphi = (x, y, z)$ . On a alors, en vertu du théorème de Cayley-Hamilton et du lemme précédent,

$$\begin{aligned} A^2 &= xA - 1 \\ A^{-1} &= x - A \\ B^2 &= yB - 1 \\ B^{-1} &= y - B \\ BA &= z - xy + yA + xB - AB. \end{aligned}$$

En outre,

$$\begin{aligned} ABA &= A(z - xy + yA + xB - AB) \\ &= A[z - yA^{-1} + xA^{-1}B] \\ &= -y + zA + xB. \end{aligned}$$

Le lemme résulte alors de ces formules par récurrence sur la longueur de  $w$ , supposé réduit.

PROPOSITION 3. Soit  $w \in F$ . Il existe alors un unique polynôme  $P_w \in \mathbb{Z}[x, y, z]$  tel que, pour tout  $\varphi \in \text{Hom}(F, SL(2, \mathbb{C}))$ , on ait

$$\text{tr } \varphi(w) = P_w(T\varphi).$$

*Démonstration.* L'existence résulte du lemme précédent:

$$\text{tr } \varphi(w) = 2P_w^{(1)}(T\varphi) + P_w^{(2)}(T\varphi)\text{tr } \varphi(a) + P_w^{(3)}(T\varphi)\text{tr } \varphi(b) + P_w^{(4)}(T\varphi)\text{tr } \varphi(ab).$$

L'unicité résulte de la surjectivité de  $T$ .

Cette proposition, avec une démonstration légèrement différente, figure dans [1].

THÉORÈME 4. Soit  $\sigma \in \text{Hom}(F, F)$ . Il existe alors un unique  $\Phi_\sigma \in (\mathbb{Z}[x, y, z])^3$  tel que, pour tout  $\varphi \in \text{Hom}(F, SL(2, \mathbb{C}))$  on ait

$$T(\varphi \circ \sigma) = \Phi_\sigma(T\varphi).$$

*Démonstration.* Cela résulte simplement de la proposition précédente, appliquée aux éléments  $\varphi(a)$ ,  $\varphi(b)$  et  $\varphi(ab)$  de  $F$ .

PROPOSITION 5. *Quels que soient  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  dans  $\text{Hom}(F, F)$ , on a*

$$\Phi_{\sigma_1 \sigma_2} = \Phi_{\sigma_1} \circ \Phi_{\sigma_2}.$$

*Démonstration.* On a

$$T(\varphi \circ \sigma_2 \circ \sigma_1) = \Phi_{\sigma_1}(T(\varphi \circ \sigma_2)) = \Phi_{\sigma_1} \circ \Phi_{\sigma_2}(T\varphi),$$

d'où le résultat à cause de l'unicité de  $\Phi_{\sigma_1 \sigma_2}$ .

PROPOSITION 6. *Quels que soient  $w \in F$  et  $\sigma \in \text{Hom}(F, F)$ , on a*

$$P_{\sigma(w)} = P_w \circ \Phi_\sigma.$$

*Démonstration.* Soit  $\sigma'$  l'élément de  $\text{Hom}(F, F)$  ainsi défini:  $\sigma'(a) = w$ ,  $\sigma'(b) = b$ . Alors  $P_w$  et  $P_{\sigma(w)}$  sont les premières composantes de  $\Phi_{\sigma'}$  et de  $\Phi_{\sigma' \circ \sigma}$  respectivement. Or  $\Phi_{\sigma' \circ \sigma} = \Phi_{\sigma'} \circ \Phi_\sigma$ , d'où le résultat.

THÉORÈME 7. *Soit  $\sigma \in \text{Hom}(F, F)$ . Il existe alors un polynôme  $Q_\sigma \in \mathbb{Z}[x, y, z]$  tel que l'on ait  $\lambda \circ \Phi_\sigma = \lambda \cdot Q_\sigma$ .*

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in \text{Hom}(F, SL(2, \mathbb{C}))$  tel que  $\lambda(T\varphi) = 0$ . Alors  $\varphi(a)$  et  $\varphi(b)$  ont une direction propre commune. Il en est donc de même de  $\varphi(\sigma(a))$  et de  $\varphi(\sigma(b))$ . Par suite  $\lambda(\varphi_\sigma(T\varphi)) = 0$ .

L'existence de  $Q_\sigma$  avait été conjecturée dans [3] et prouvée dans [8].

PROPOSITION 8. *Si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont deux éléments de  $\text{Hom}(F, F)$  on a*

$$Q_{\sigma_1 \sigma_2} = Q_{\sigma_2} \cdot Q_{\sigma_1} \circ \Phi_{\sigma_2}.$$

*Démonstration.* On a

$$\lambda \circ \Phi_{\sigma_1 \sigma_2} = (\lambda \circ \Phi_{\sigma_1}) \circ \Phi_{\sigma_2} = (\lambda \cdot Q_{\sigma_1}) \circ \Phi_{\sigma_2} = \lambda \cdot Q_{\sigma_2} \cdot Q_{\sigma_1} \circ \Phi_{\sigma_2}.$$

PROPOSITION 9. *Si  $w$  et  $w'$  sont deux éléments de  $F$  tels que  $\tilde{w} = \tilde{w}'$ , alors  $P_w - P_{w'}$  est divisible par  $\lambda$ .*

*Démonstration.* Si  $\varphi$  est un homomorphisme de  $F$  dans  $SL(2, \mathbb{C})$  tel que  $\varphi(a)$  et  $\varphi(b)$  ont une direction propre commune, on a  $P_w(T\varphi) = P_{w'}(T\varphi)$ , comme on peut le voir en trigonalisant simultanément  $\varphi(a)$  et  $\varphi(b)$ . Par suite le polynôme  $P_w - P_{w'}$  s'annule sur les zéros de  $\lambda$ .

Soit  $\Omega$  la variété des zéros de  $\lambda$ . Le théorème 7 dit que  $\Omega$  est stable par tout  $\Phi_\sigma$ . La proposition 9 dit que la restriction de  $\Phi_\sigma$  à  $\Omega$  ne dépend que de l'abélianisé  $\tilde{\sigma}$  de  $\sigma$ .

PROPOSITION 10. Si  $\sigma \in \text{Aut}(F)$ , alors  $\det \Phi'_\sigma = \pm 1$ .

*Démonstration.* Différentions la relation  $\Phi_{\sigma^{-1}} \circ \Phi_\sigma = \text{id}$  et prenons les déterminants. On obtient

$$\det(\Phi'_{\sigma^{-1}} \circ \Phi'_\sigma) \det(\Phi'_\sigma) = 1.$$

Comme ces déterminants sont des polynômes à coefficients entiers, ils sont nécessairement constants, égaux à  $\pm 1$ .

LEMME 11. Pour tout  $\sigma \in \text{Hom}(F, F)$ , on a  $Q_\sigma(0, 0, 0) = 0$  ou  $1$ .

*Démonstration.* Il suffit de considérer  $\varphi \in \text{Hom}(F, SL(2, \mathbb{C}))$  tel que  $\varphi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\varphi(b) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ .

Nous donnerons plus loin un résultat plus précis que celui-ci.

PROPOSITION 12. Si  $\sigma \in \text{Aut } F$ , on a  $Q_\sigma = 1$ .

*Démonstration.* Ceci résulte de la proposition 8 et du lemme 11.

## II. DÉTERMINATION DU NOYAU DE $\Phi$

Comme l'ont observé Kolar et Ali [3], les polynômes de Chebyshev interviennent naturellement dans ce contexte.

Considérons les deux suites de polynômes  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  satisfaisant la même relation de récurrence

$$t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = xt_n(x)$$

$$u_{n+1}(x) + u_{n-1}(x) = xu_n(x)$$

avec les conditions initiales

$$t_0(x) = 2, \quad t_1(x) = x, \quad u_0(x) = 0, \quad u_1(x) = 1.$$

Il est facile de vérifier les faits suivants:

$$t_{-n} = t_n, \quad d^0 t_n = |n|$$

$$u_{-n} = -u_n, \quad d^0 u_n = n - 1 \quad \text{si} \quad n \geq 1$$

$$t_n(2 \cos \varphi) = 2 \cos n\varphi$$

$$u_n(2 \cos \varphi) = \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}$$

$$t_n(x) = xu_n(x) - 2u_{n-1}(x).$$