Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: POLYNÔMES ASSOCIÉS AUX ENDOMORPHISMES DE GROUPES LIBRES

Autor: Peyrière, Jacques

Kurzfassung

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60419

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 18.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 39 (1993), p. 153-175

POLYNÔMES ASSOCIÉS AUX ENDOMORPHISMES DE GROUPES LIBRES

par Jacques PEYRIÈRE, WEN ZHI-YING et WEN ZHI-XIONG

ABSTRACT. If σ is an endomorphism of F, the free group generated by a and b, there exists a unique polynomial map Φ_σ from $\mathbf{C}^3$ to $\mathbf{C}^3$, with integral coefficients, such that, for any representation φ of F in $SL(2, \mathbf{C})$, one has

$$(\operatorname{tr} \varphi(\sigma(a)), \operatorname{tr} \varphi(\sigma(b)), \operatorname{tr} \varphi(\sigma(ab))) = \Phi_\sigma(\operatorname{tr} \varphi(a), \operatorname{tr} \varphi(b), \operatorname{tr} \varphi(ab)) .$$

The following relation holds: $\Phi_{\sigma' \circ \sigma} = \Phi_\sigma \circ \Phi_{\sigma'}$. The kernel of Φ is shown to be generated by the inner automorphisms of F and the involution which takes a to a^{-1} and b to b^{-1}. If λ denotes the polynomial $x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 4$, then $\lambda \circ \Phi_\sigma$ factorizes under the form $\lambda \cdot Q_\sigma$, where Q_σ is a polynomial with integral coefficients. Among other properties of Q_σ, it is proved that σ is an automorphism of E if and only if Q_σ equals 1 identically. The case of a free group with more than two generators is also studied but, in this case, results are less complete.

RÉSUMÉ. A chaque endomorphisme σ du groupe libre F engendré par a et b on associe une unique application polynomiale Φ_σ, à coefficients entiers, de $\mathbf{C}^3$ dans $\mathbf{C}^3$ telle que, pour toute représentation φ de F dans $SL(2, \mathbf{C})$ on ait

$$(\operatorname{tr} \varphi(\sigma(a)), \operatorname{tr} \varphi(\sigma(b)), \operatorname{tr} \varphi(\sigma(ab))) = \Phi_\sigma(\operatorname{tr} \varphi(a), \operatorname{tr} \varphi(b), \operatorname{tr} \varphi(ab)) .$$

L'application Φ est un anti-homomorphisme du monoïde des endomorphismes de F dans le monoïde des applications polynomiales de $\mathbf{C}^3$ dans $\mathbf{C}^3$, muni de la composition. Diverses propriétés de Φ sont établies. En particulier, son noyau est caractérisé. En outre, si λ désigne le polynôme $x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 4$, le polynôme $\lambda \circ \Phi$ se factorise sous la forme $\lambda \cdot Q_\sigma$ où Q_σ est un polynôme à coefficients entiers. Il est établi, entre autre, que σ est un automorphisme de F si et seulement si Q_σ est identiquement égal à 1. Le cas d'un groupe libre à plus de deux générateurs est également abordé, mais avec des résultats moins complets.

AMS Classification: 20E05 - 20M05 - 16R99 - 15A24.

KEYWORDS: Freegroups - finite automata - traces - PI rings - polynomial identities.

Cet article répond à certaines questions posées dans [8]. Pour la commodité du lecteur, dans la première partie, les résultats de [8] sont repris, et dans certains cas précisés.

I. Introduction

On désigne dans les sections 1, 2, 3, 4 et 5 par F le groupe libre à deux générateurs, a et b. On note $\operatorname{tr} A$ la trace de la matrice carrée A. Si φ est un homomorphisme de F dans $SL(2, \mathbf{C})$, on note $T\varphi$ le triplet $(\operatorname{tr} \varphi(a), \operatorname{tr} \varphi(b), \operatorname{tr} \varphi(ab))$.

L'image de T est $\mathbf{C}^3$ tout entier: pour s'en persuader, il suffit de considérer les φ tels que $\varphi(a) = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi(b) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda^{-1} & y \end{pmatrix}$.

Si σ et σ' sont des endomorphismes de F, on pose $\sigma\sigma' = \sigma' \circ \sigma$. On identifiera un élément σ de $\operatorname{Hom}(F, F)$ au couple $(\sigma(a), \sigma(b)) \in F \times F$.

Si w est un élément de F, on désignera par $\tilde{w}$ l'élément de $\mathbf{Z}^2$, image de w par l'homomorphisme d'abélianisation. Si σ est un endomorphisme de F, il définit, par abélianisation, un endomorphisme de $\mathbf{Z}^2$ dont nous désignerons par $\tilde{\sigma}$ la matrice transposée. En d'autres termes, $\tilde{\sigma}$ est la matrice carrée indexée par $\{a, b\} \times \{a, b\}$ dont les coefficients d'interprètent de la façon suivante: si u et v appartiennent à $\{a, b\}$, $\tilde{\sigma}_{u,v}$ = somme des puissances de la lettre v dans $\sigma(u)$. On a évidemment $(\sigma\sigma')^{\sim} = \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}'$.

On note λ le polynôme $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 4$. On sait que, pour $\varphi \in \operatorname{Hom}(F, SL(2, \mathbf{C}))$, $\lambda(T\varphi)$ est nul si et seulement si $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ ont une direction propre commune.

LEMME 1. *Soit A et B deux éléments de $SL(2, \mathbf{C})$. On a*

$$AB + BA = \operatorname{tr}(AB) - (\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} B) + A \operatorname{tr} B + B \operatorname{tr} A .$$

Démonstration. Le théorème de Cayley-Hamilton donne les relations suivantes:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \operatorname{tr} A - A \\ B^{-1} &= \operatorname{tr} B - B \\ (AB)^2 &= AB \operatorname{tr}(AB) - 1 . \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} BA &= A^{-1}ABABB^{-1} \\ &= A^{-1}(AB \operatorname{tr}(AB) - 1)B^{-1} \\ &= \operatorname{tr}(AB) - (\operatorname{tr} A - A)(\operatorname{tr} B - B) \\ &= \operatorname{tr}(AB) - (\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} B) + A \operatorname{tr} B + B \operatorname{tr} A - AB . \end{aligned}$$