

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 39 (1993)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: POLYNÔMES ASSOCIÉS AUX ENDOMORPHISMES DE GROUPES LIBRES
Autor: Peyrière, Jacques
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-60419>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

POLYNÔMES ASSOCIÉS AUX ENDOMORPHISMES DE GROUPES LIBRES

par Jacques PEYRIÈRE, WEN ZHI-YING et WEN ZHI-XIONG

ABSTRACT. If σ is an endomorphism of F , the free group generated by a and b , there exists a unique polynomial map Φ_σ from \mathbf{C}^3 to \mathbf{C}^3 , with integral coefficients, such that, for any representation φ of F in $SL(2, \mathbf{C})$, one has

$$(\mathrm{tr} \varphi(\sigma(a)), \mathrm{tr} \varphi(\sigma(b)), \mathrm{tr} \varphi(\sigma(ab))) = \Phi_\sigma(\mathrm{tr} \varphi(a), \mathrm{tr} \varphi(b), \mathrm{tr} \varphi(ab)) .$$

The following relation holds: $\Phi_{\sigma' \circ \sigma} = \Phi_\sigma \circ \Phi_{\sigma'}$. The kernel of Φ is shown to be generated by the inner automorphisms of F and the involution which takes a to a^{-1} and b to b^{-1} . If λ denotes the polynomial $x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 4$, then $\lambda \circ \Phi_\sigma$ factorizes under the form $\lambda \cdot Q_\sigma$, where Q_σ is a polynomial with integral coefficients. Among other properties of Q_σ , it is proved that σ is an automorphism of E if and only if Q_σ equals 1 identically. The case of a free group with more than two generators is also studied but, in this case, results are less complete.

RÉSUMÉ. A chaque endomorphisme σ du groupe libre F engendré par a et b on associe une unique application polynomiale Φ_σ , à coefficients entiers, de \mathbf{C}^3 dans \mathbf{C}^3 telle que, pour toute représentation φ de F dans $SL(2, \mathbf{C})$ on ait

$$(\mathrm{tr} \varphi(\sigma(a)), \mathrm{tr} \varphi(\sigma(b)), \mathrm{tr} \varphi(\sigma(ab))) = \Phi_\sigma(\mathrm{tr} \varphi(a), \mathrm{tr} \varphi(b), \mathrm{tr} \varphi(ab)) .$$

L'application Φ est un anti-homomorphisme du monoïde des endomorphismes de F dans le monoïde des applications polynomiales de \mathbf{C}^3 dans \mathbf{C}^3 , muni de la composition. Diverses propriétés de Φ sont établies. En particulier, son noyau est caractérisé. En outre, si λ désigne le polynôme $x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 4$, le polynôme $\lambda \circ \Phi$ se factorise sous la forme $\lambda \cdot Q_\sigma$ où Q_σ est un polynôme à coefficients entiers. Il est établi, entre autre, que σ est un automorphisme de F si et seulement si Q_σ est identiquement égal à 1. Le cas d'un groupe libre à plus de deux générateurs est également abordé, mais avec des résultats moins complets.

Cet article répond à certaines questions posées dans [8]. Pour la commodité du lecteur, dans la première partie, les résultats de [8] sont repris, et dans certains cas précisés.

I. INTRODUCTION

On désigne dans les sections 1, 2, 3, 4 et 5 par F le groupe libre à deux générateurs, a et b . On note $\text{tr } A$ la trace de la matrice carrée A . Si φ est un homomorphisme de F dans $SL(2, \mathbb{C})$, on note $T\varphi$ le triplet $(\text{tr } \varphi(a), \text{tr } \varphi(b), \text{tr } \varphi(ab))$.

L'image de T est \mathbb{C}^3 tout entier: pour s'en persuader, il suffit de considérer les φ tels que $\varphi(a) = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi(b) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda^{-1} & y \end{pmatrix}$.

Si σ et σ' sont des endomorphismes de F , on pose $\sigma\sigma' = \sigma' \circ \sigma$. On identifiera un élément σ de $\text{Hom}(F, F)$ au couple $(\sigma(a), \sigma(b)) \in F \times F$.

Si w est un élément de F , on désignera par \tilde{w} l'élément de \mathbb{Z}^2 , image de w par l'homomorphisme d'abélianisation. Si σ est un endomorphisme de F , il définit, par abélianisation, un endomorphisme de \mathbb{Z}^2 dont nous désignerons par $\tilde{\sigma}$ la matrice transposée. En d'autres termes, $\tilde{\sigma}$ est la matrice carrée indexée par $\{a, b\} \times \{a, b\}$ dont les coefficients d'interprètent de la façon suivante: si u et v appartiennent à $\{a, b\}$, $\tilde{\sigma}_{u,v}$ = somme des puissances de la lettre v dans $\sigma(u)$. On a évidemment $(\sigma\sigma')^{\sim} = \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}'$.

On note λ le polynôme $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 4$. On sait que, pour $\varphi \in \text{Hom}(F, SL(2, \mathbb{C}))$, $\lambda(T\varphi)$ est nul si et seulement si $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ ont une direction propre commune.

LEMME 1. Soit A et B deux éléments de $SL(2, \mathbb{C})$. On a

$$AB + BA = \text{tr}(AB) - (\text{tr } A)(\text{tr } B) + A \text{tr } B + B \text{tr } A.$$

Démonstration. Le théorème de Cayley-Hamilton donne les relations suivantes:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \text{tr } A - A \\ B^{-1} &= \text{tr } B - B \\ (AB)^2 &= AB \text{tr}(AB) - 1. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} BA &= A^{-1}ABABB^{-1} \\ &= A^{-1}(AB \text{tr}(AB) - 1)B^{-1} \\ &= \text{tr}(AB) - (\text{tr } A - A)(\text{tr } B - B) \\ &= \text{tr}(AB) - (\text{tr } A)(\text{tr } B) + A \text{tr } B + B \text{tr } A - AB. \end{aligned}$$

LEMME 2. Soit $w \in F$. Il existe alors quatre polynômes,

$$P_w^{(j)} \in \mathbb{Z}[x, y, z] \quad (j = 1, 2, 3, 4),$$

tels que, pour tout $\varphi \in \text{Hom}(F, SL(2, \mathbb{C}))$, on ait

$$\varphi(w) = P_w^{(1)}(T\varphi) + P_w^{(2)}(T\varphi)\varphi(a) + P_w^{(3)}(T\varphi)\varphi(b) + P_w^{(4)}(T\varphi)\varphi(ab).$$

Démonstration. Posons, pour simplifier, $\varphi(a) = A$, $\varphi(b) = B$ et $T\varphi = (x, y, z)$. On a alors, en vertu du théorème de Cayley-Hamilton et du lemme précédent,

$$\begin{aligned} A^2 &= xA - 1 \\ A^{-1} &= x - A \\ B^2 &= yB - 1 \\ B^{-1} &= y - B \\ BA &= z - xy + yA + xB - AB. \end{aligned}$$

En outre,

$$\begin{aligned} ABA &= A(z - xy + yA + xB - AB) \\ &= A[z - yA^{-1} + xA^{-1}B] \\ &= -y + zA + xB. \end{aligned}$$

Le lemme résulte alors de ces formules par récurrence sur la longueur de w , supposé réduit.

PROPOSITION 3. Soit $w \in F$. Il existe alors un unique polynôme $P_w \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ tel que, pour tout $\varphi \in \text{Hom}(F, SL(2, \mathbb{C}))$, on ait

$$\text{tr } \varphi(w) = P_w(T\varphi).$$

Démonstration. L'existence résulte du lemme précédent:

$$\text{tr } \varphi(w) = 2P_w^{(1)}(T\varphi) + P_w^{(2)}(T\varphi)\text{tr } \varphi(a) + P_w^{(3)}(T\varphi)\text{tr } \varphi(b) + P_w^{(4)}(T\varphi)\text{tr } \varphi(ab).$$

L'unicité résulte de la surjectivité de T .

Cette proposition, avec une démonstration légèrement différente, figure dans [1].

THÉORÈME 4. Soit $\sigma \in \text{Hom}(F, F)$. Il existe alors un unique $\Phi_\sigma \in (\mathbb{Z}[x, y, z])^3$ tel que, pour tout $\varphi \in \text{Hom}(F, SL(2, \mathbb{C}))$ on ait

$$T(\varphi \circ \sigma) = \Phi_\sigma(T\varphi).$$

Démonstration. Cela résulte simplement de la proposition précédente, appliquée aux éléments $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ et $\varphi(ab)$ de F .

PROPOSITION 5. *Quels que soient σ_1 et σ_2 dans $\text{Hom}(F, F)$, on a*

$$\Phi_{\sigma_1 \sigma_2} = \Phi_{\sigma_1} \circ \Phi_{\sigma_2}.$$

Démonstration. On a

$$T(\varphi \circ \sigma_2 \circ \sigma_1) = \Phi_{\sigma_1}(T(\varphi \circ \sigma_2)) = \Phi_{\sigma_1} \circ \Phi_{\sigma_2}(T\varphi),$$

d'où le résultat à cause de l'unicité de $\Phi_{\sigma_1 \sigma_2}$.

PROPOSITION 6. *Quels que soient $w \in F$ et $\sigma \in \text{Hom}(F, F)$, on a*

$$P_{\sigma(w)} = P_w \circ \Phi_\sigma.$$

Démonstration. Soit σ' l'élément de $\text{Hom}(F, F)$ ainsi défini: $\sigma'(a) = w$, $\sigma'(b) = b$. Alors P_w et $P_{\sigma(w)}$ sont les premières composantes de $\Phi_{\sigma'}$ et de $\Phi_{\sigma' \circ \sigma}$ respectivement. Or $\Phi_{\sigma' \circ \sigma} = \Phi_{\sigma'} \circ \Phi_\sigma$, d'où le résultat.

THÉORÈME 7. *Soit $\sigma \in \text{Hom}(F, F)$. Il existe alors un polynôme $Q_\sigma \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ tel que l'on ait $\lambda \circ \Phi_\sigma = \lambda \cdot Q_\sigma$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \text{Hom}(F, SL(2, \mathbb{C}))$ tel que $\lambda(T\varphi) = 0$. Alors $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ ont une direction propre commune. Il en est donc de même de $\varphi(\sigma(a))$ et de $\varphi(\sigma(b))$. Par suite $\lambda(\varphi_\sigma(T\varphi)) = 0$.

L'existence de Q_σ avait été conjecturée dans [3] et prouvée dans [8].

PROPOSITION 8. *Si σ_1 et σ_2 sont deux éléments de $\text{Hom}(F, F)$ on a*

$$Q_{\sigma_1 \sigma_2} = Q_{\sigma_2} \cdot Q_{\sigma_1} \circ \Phi_{\sigma_2}.$$

Démonstration. On a

$$\lambda \circ \Phi_{\sigma_1 \sigma_2} = (\lambda \circ \Phi_{\sigma_1}) \circ \Phi_{\sigma_2} = (\lambda \cdot Q_{\sigma_1}) \circ \Phi_{\sigma_2} = \lambda \cdot Q_{\sigma_2} \cdot Q_{\sigma_1} \circ \Phi_{\sigma_2}.$$

PROPOSITION 9. *Si w et w' sont deux éléments de F tels que $\tilde{w} = \tilde{w}'$, alors $P_w - P_{w'}$ est divisible par λ .*

Démonstration. Si φ est un homomorphisme de F dans $SL(2, \mathbb{C})$ tel que $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ ont une direction propre commune, on a $P_w(T\varphi) = P_{w'}(T\varphi)$, comme on peut le voir en trigonalisant simultanément $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$. Par suite le polynôme $P_w - P_{w'}$ s'annule sur les zéros de λ .

Soit Ω la variété des zéros de λ . Le théorème 7 dit que Ω est stable par tout Φ_σ . La proposition 9 dit que la restriction de Φ_σ à Ω ne dépend que de l'abélianisé $\tilde{\sigma}$ de σ .

PROPOSITION 10. Si $\sigma \in \text{Aut}(F)$, alors $\det \Phi'_\sigma = \pm 1$.

Démonstration. Différentions la relation $\Phi_{\sigma^{-1}} \circ \Phi_\sigma = \text{id}$ et prenons les déterminants. On obtient

$$\det(\Phi'_{\sigma^{-1}} \circ \Phi'_\sigma) \det(\Phi'_\sigma) = 1.$$

Comme ces déterminants sont des polynômes à coefficients entiers, ils sont nécessairement constants, égaux à ± 1 .

LEMME 11. Pour tout $\sigma \in \text{Hom}(F, F)$, on a $Q_\sigma(0, 0, 0) = 0$ ou 1 .

Démonstration. Il suffit de considérer $\varphi \in \text{Hom}(F, SL(2, \mathbb{C}))$ tel que $\varphi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi(b) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Nous donnerons plus loin un résultat plus précis que celui-ci.

PROPOSITION 12. Si $\sigma \in \text{Aut } F$, on a $Q_\sigma = 1$.

Démonstration. Ceci résulte de la proposition 8 et du lemme 11.

II. DÉTERMINATION DU NOYAU DE Φ

Comme l'ont observé Kolar et Ali [3], les polynômes de Chebyshev interviennent naturellement dans ce contexte.

Considérons les deux suites de polynômes $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ satisfaisant la même relation de récurrence

$$t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = xt_n(x)$$

$$u_{n+1}(x) + u_{n-1}(x) = xu_n(x)$$

avec les conditions initiales

$$t_0(x) = 2, \quad t_1(x) = x, \quad u_0(x) = 0, \quad u_1(x) = 1.$$

Il est facile de vérifier les faits suivants:

$$t_{-n} = t_n, \quad d^0 t_n = |n|$$

$$u_{-n} = -u_n, \quad d^0 u_n = n - 1 \quad \text{si} \quad n \geq 1$$

$$t_n(2 \cos \varphi) = 2 \cos n\varphi$$

$$u_n(2 \cos \varphi) = \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}$$

$$t_n(x) = xu_n(x) - 2u_{n-1}(x).$$

L'intérêt pour nous de ces polynômes vient du lemme suivant dont la démonstration par récurrence est immédiate.

LEMME 1. Si A est une matrice carrée telle que $A^2 = xA - 1$, alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$A^n = u_n(x)A - u_{n-1}(x)$$

et, si A est une matrice 2×2 , $\text{tr } A^n = t_n(x)$.

LEMME 2. Soit $w = a^{m_1}b^{n_1}a^{m_2}b^{n_2} \cdots a^{m_k}b^{n_k}$ un élément de F . On suppose que, si $k > 0$, on a $m_1m_2 \cdots m_kn_1 \cdots n_k \neq 0$, (si $k = 0$, par convention $w = e$). Alors $d_z^0 P_w = k$, (où d_z^0 désigne le degré par rapport à la variable z).

Démonstration. Elle se fait par récurrence sur k . Le lemme est vrai pour $k = 0$. Supposons-le vrai pour $k \leq l - 1$.

Soit $w = a^{m_1}b^{n_1}a^{m_2}b^{n_2} \cdots a^{m_l}b^{n_l} = w_1 a^{m_l} b^{n_l}$. On a, si $T\varphi = (x, y, z)$,

$$\varphi(w) = \varphi(w_1) [u_{m_l}(x)\varphi(a) - u_{m_l-1}(x)] [u_{n_l}(y)\varphi(b) - u_{n_l-1}(y)] .$$

La trace de $\varphi(w)$ est donc combinaison linéaire à coefficients polynômiaux en x et y des traces de $\varphi(w_1 ab)$, $\varphi(w_1 a)$, $\varphi(w_1 b)$ et $\varphi(w_1)$. Puisque, pour calculer des traces de produits, on peut opérer des permutations circulaires, l'hypothèse de récurrence montre que les traces de $\varphi(w_1 a)$, $\varphi(w_1 b)$ et $\varphi(w_1)$ ont un degré en z inférieur ou égal à $l - 1$.

Ainsi donc le degré en z du polynôme

$$\text{tr } \varphi(w) - \text{tr } (\varphi(w_1 ab)) u_{m_l}(x) u_{n_l}(y)$$

est strictement inférieur à l .

Répétant le même argument aux autres facteurs de w , on obtient que le degré en z du polynôme

$$\text{tr } \varphi(w) - \text{tr } (\varphi[(ab)^l]) \prod_{j=1}^l [u_{m_j}(x) u_{n_j}(y)]$$

est au plus $l - 1$.

Mais $\text{tr } \varphi(ab)^l = t_l(z)$ est un polynôme en z de degré l . Ceci achève la démonstration.

LEMME 3. Si $w \in F$ est tel que $P_w = \alpha z$ ($\alpha \in \mathbb{Z}$), alors $\alpha = 1$ et l'on a $w = uabu^{-1}$ ou $w = ua^{-1}b^{-1}u^{-1}$ pour un $u \in F$.

Démonstration. Si $\alpha = 0$, le lemme précédent montre que la réduction cyclique de w est e , a^m ou b^n . Dans aucun de ces cas on obtient $P_w = 0$. Donc $\alpha \neq 0$.

Le lemme précédent montre alors que la réduction cyclique de w est $a^m b^n$ (avec $mn \neq 0$). Alors le lemme 1 montre que l'on a

$$P_w(x, y, z) = u_m(x)u_n(y)z - yu_{m-1}(x)u_n(y) - xu_m(x)u_{n-1}(y) + 2u_{m-1}(x)u_{n-1}(y).$$

Or $u_m(x)u_n(y) = \alpha$ implique $|m| = |n| = 1$ et $\alpha = mn$. Si $mn = -1$, alors l'un des deux termes $yu_{m-1}(x)u_n(y)$ ou $xu_m(x)u_{n-1}(y)$ reste seul, ce qui est impossible. Donc $m = n = \pm 1$, d'où le lemme.

LEMME 4. Soit $w \in F$. Alors

1°) Si $P_w = \alpha x$, on a $\alpha = 1$ et $w = uau^{-1}$ ou $w = ua^{-1}u^{-1}$.

2°) Si $P_w = \alpha y$, on a $\alpha = 1$ et $w = ubu^{-1}$ ou $w = ub^{-1}u^{-1}$.

Démonstration. Supposons que l'on ait $P_w = \alpha x$. Considérons l'élément $\sigma \in \text{Hom}(F, F)$ ainsi défini: $\sigma(a) = ab$, $\sigma(b) = b^{-1}$. On a $\Phi_\sigma(x, y, z) = (z, y, x)$, donc, en vertu de la proposition I.3, on a $P_{\sigma(w)}(x, y, z) = P_w \circ \Phi_\sigma(x, y, z) = \alpha z$. On en déduit (lemme précédent) que $\alpha = 1$ et que $\sigma(w) = uabu^{-1}$ ou $\sigma(w) = ua^{-1}b^{-1}u^{-1}$. Mais σ est un isomorphisme: $\sigma^{-1}(a) = ab$, $\sigma^{-1}(b) = b^{-1}$. On a donc $w = \sigma^{-1}(u)a\sigma^{-1}(u^{-1})$ ou $w = \sigma^{-1}(u)b^{-1}a^{-1}b\sigma^{-1}(u^{-1})$.

Pour démontrer la seconde assertion, on utilise de la même façon l'isomorphisme (a^{-1}, ab) .

THÉORÈME 5. Pour $\sigma \in \text{Hom}(F, F)$ les propriétés suivantes sont équivalentes:

1°) $\Phi_\sigma = \text{id}$

2°) σ est soit un automorphisme intérieur, soit un automorphisme intérieur composé avec l'involution (a^{-1}, b^{-1}) .

Démonstration. Il est clair que la seconde propriété implique la première. Supposons que l'on ait $\Phi_\sigma = \text{id}$. Il résulte du lemme précédent que l'on a

$$\sigma(a) = ua^\varepsilon u^{-1} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1 \quad \text{et} \quad u \in F$$

et

$$\sigma(b) = vb^\eta v^{-1} \quad \text{avec} \quad \eta = \pm 1 \quad \text{et} \quad v \in F.$$

On sait par ailleurs (proposition I.9) que λ divise $P_{\sigma(ab)} - P_{a^\varepsilon b^\eta}$. Comme $P_{\sigma(ab)} = z$ et $P_{a^{-1}b} = P_{ab^{-1}} = xy - z$ on a $\varepsilon = \eta$. Quitte à composer avec l'involution (a^{-1}, b^{-1}) , on peut supposer que l'on a $\varepsilon = \eta = 1$.

Supposons que les mots uau^{-1} et vbv^{-1} soient réduits. Si $u = v = e$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, supposons que $|u| \geq |v|$ (où $|u|$ désigne la longueur de u). On a alors $u = u'b^n$ avec $n \neq 0$, la dernière lettre de u' étant a , si $|u'| > 0$. Dans ces conditions on a

$$\sigma(ab) = u'b^n ab^{-n} u'^{-1} vbv^{-1}$$

d'où

$$z = P_{(ab^{-n} u'^{-1} vbv^{-1} u' b^n)}.$$

Utilisant une nouvelle fois le lemme 3, on obtient que $u'^{-1}v = b^k$. L'irréductibilité de vbv^{-1} implique alors $u' = v$. Ceci montre que σ est un automorphisme intérieur.

III. APPLICATIONS POLYNOMIALES LAISSANT λ INVARIANT

CARACTÉRISATION DES σ TELS QUE $Q_\sigma = 1$

On désigne par R un domaine d'intégrité de caractéristique nulle et par \mathcal{A} l'ensemble des $\psi \in (R[x, y, z])^3$ tels que $\lambda \circ \psi = \lambda$.

L'ensemble \mathcal{A} contient $\{\Phi_\sigma; \sigma \in \text{aut } F\}$. Il sera commode de considérer les éléments suivants de $\text{aut } F$:

$$\alpha = (b, a), \quad \beta = (a, b^{-1}), \quad \gamma = (ab, b^{-1}).$$

Les Φ correspondants sont

$$\Phi_\alpha(x, y, z) = (y, x, z)$$

$$\Phi_\beta(x, y, z) = (x, y, xy - z)$$

$$\Phi_\gamma(x, y, z) = (z, y, x).$$

On considérera aussi les applications polynomiales suivantes:

$$\rho(x, y, z) = (-x, -y, z)$$

et

$$\theta(x, y, z) = (-x, y, -z).$$

Ces applications polynomiales sont également dans \mathcal{A} .

Nous allons montrer que \mathcal{A} est engendré par $\Phi_\alpha, \Phi_\beta, \Phi_\gamma, \rho$ et θ .

LEMME 1. Si $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ appartient à \mathcal{A} , alors on a, pour $i = 1, 2, 3$, $d^0\psi_i \geq 1$.

Démonstration. Si, par exemple, ψ_3 était constant, égal à c , on aurait

$$\psi_1^2 + \psi_2^2 - c\psi_1\psi_2 = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - c^2.$$

Or, le premier membre de cette expression est réductible dans un corps, extension convenable de R , alors que le second membre ne l'est pas.

Notons $\deg \psi$ la somme $d^0\psi_1 + d^0\psi_2 + d^0\psi_3$ et posons

$$\mathcal{L} = \{\psi \in \mathcal{A}; \deg \psi = 3\}.$$

LEMME 2. \mathcal{L} est le groupe engendré par Φ_α, Φ_γ et ρ .

Démonstration. Appelons les variables x_1, x_2, x_3 au lieu de x, y, z . Soit $\psi \in L$. On a $\psi_j(x) = l_j + u_j$ où l_j est un polynôme homogène de degré 1 et $u_j \in R$. On a

$$\sum_{j=1}^3 (l_j + u_j)^2 - (l_1 + u_1)(l_2 + u_2)(l_3 + u_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2x_3.$$

L'identification des termes de degré 3 donne $l_j = v_j x_{\tau(j)}$ où $v_j \in R$, et $\tau \in \mathcal{S}_3$ et $v_1v_2v_3 = 1$. L'identification des termes quadratiques donne alors $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, $v_1^2 = v_2^2 = v_3^2 = 1$.

Il est dès lors facile de se convaincre que ψ est dans le groupe engendré par Φ_α, Φ_δ et ρ .

LEMME 3. Soit $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in \mathcal{A}$ tel que $\deg \psi > 3$. Alors, il existe $\sigma \in \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$, le groupe engendré par α, β et γ , tel que $\deg(\Phi_\sigma \circ \psi) < \deg \psi$.

Démonstration. Puisque Φ_α et Φ_γ sont des transpositions distinctes de deux composantes, quitte à remplacer ψ par $\Phi_\sigma \circ \psi$, avec $\sigma \in \langle \alpha, \gamma \rangle$, on peut supposer que $d^0\psi_3 \geq d^0\psi_2 \geq d^0\psi_1 \geq 1$.

Puisque $\deg \psi > 3$, on a $d^0\psi_3 \geq 2$. Or $(\psi_3 - \psi_1\psi_2)\psi_3 + \psi_2^2 + \psi_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 - xyz$. Si l'on avait $d^0\psi_3 \neq d^0\psi_1\psi_2$ on aurait

$$3 = \sup(d^0\psi_3, d^0\psi_1\psi_2) + d^0\psi_3 \geq 4.$$

On a donc $d^0\psi_3 = d^0\psi_1\psi_2$, d'où $d^0\psi_3 > d^0\psi_2$. Si l'on avait $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) = d^0\psi_3$, on aurait $2d^0\psi_3 = 3$, donc on a $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) < d^0\psi_3$. Ceci montre que $\deg \Phi_\beta \circ \psi < \deg \psi$. Ceci achève la démonstration du lemme.

THÉORÈME 4. \mathcal{A} est le groupe engendré par $\Phi_\alpha, \Phi_\beta, \Phi_\gamma$ et ρ .

Démonstration. Il suffit d'appliquer de façon répétitive le lemme précédent pour se ramener au lemme 2.

THÉORÈME 5. L'ensemble des $\sigma \in \text{Hom}(F, F)$ tels que $Q_\sigma = 1$ est l'ensemble des automorphismes de F .

Démonstration. Dire que $Q_\sigma = 1$ équivaut à dire $\Phi_\sigma \in \mathcal{A}$. Si $\Phi_\sigma \in \mathcal{A}$, le lemme 3 permet de montrer l'existence d'un $\tau \in \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ tel que $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma \in \{\theta, \rho\}$. Mais, en vertu des lemmes II.3 et II.4, on a alors $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma = \text{id}$. Il en résulte (théorème II.5) que $\tau \circ \sigma$ est un automorphisme, donc aussi σ .

LEMME 6. Si i_w désigne l'automorphisme intérieur $u \rightarrow wuw^{-1}$ de F . On a

$$i_a = \beta\alpha\beta\gamma\beta\gamma\alpha\beta \quad \text{et} \quad i_b = \alpha i_a \alpha.$$

Démonstration. Elle se fait par vérification directe.

THÉORÈME 7. L'ensemble des automorphismes de F est le groupe engendré par α, β et γ .

Démonstration. Soit $\sigma \in \text{Aut } F$. Alors $\Phi_\sigma \in \mathcal{A}$. Comme précédemment, il existe $\tau \in \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ tel que $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma = \text{id}$. Le théorème II.1 montre alors $\tau \circ \sigma$ est soit un automorphisme intérieur, soit un automorphisme intérieur composé avec (a^{-1}, b^{-1}) , qui n'est autre que $(\alpha\beta)^2$. Le théorème résulte alors du lemme précédent.

Remarque. Ce théorème est un résultat ancien de Nielsen [5], [6], mais la démonstration que nous en donnons ne fait pas appel à la délicate théorie de la réduction de Nielsen.

IV. ETUDE DES RELATIONS $\Phi_\sigma = \Phi_\tau$ ET $Q_\sigma = 0$.

Notons F^* l'ensemble des éléments w de F qui sont image d'un générateur par un automorphisme de F .

THÉORÈME 1. Soit σ et τ deux endomorphismes de F tels que $\sigma(a), \sigma(b)$ et $\sigma(ab)$ soient dans F^* . Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

$$1^\circ) \quad \Phi_\sigma = \Phi_\tau$$

2°) $\tau(a), \tau(b)$ et $\tau(ab)$ sont conjugués respectivement à $\sigma(a)$ ou $\sigma(a)^{-1}, \sigma(b)$ ou $\sigma(b)^{-1}, \sigma(ab)$ ou $\sigma(ab)^{-1}$.

Démonstration. Il est clair que la seconde assertion implique la première, et ce sans qu'il soit nécessaire de faire d'hypothèses sur σ .

Supposons que l'on ait $\Phi_\sigma = \Phi_\tau$ et $\sigma(a) = \mu(a), \sigma(b) = \nu(b)$ et $\sigma(ab) = \xi(ab)$ (où μ, ν et ξ sont des automorphismes de F). On a alors $\Phi_{\mu^{-1}\sigma} = \Phi_{\mu^{-1}\tau}$, d'où en vertu du lemme II.4, $\mu^{-1}\tau(a) = u\sigma(a)^{\pm 1}u^{-1}$ pour un $u \in F$. Par suite $\tau(a) = \mu(u)\sigma(a)^{\pm 1}\mu(u)^{-1}$. On opère de même pour $\tau(b)$ et $\tau(ab)$.

THÉORÈME 2. *Pour des automorphismes σ et τ de F , les assertions suivantes sont équivalentes:*

$$1^\circ) \quad \Phi_\sigma = \Phi_\tau$$

$$2^\circ) \quad \tilde{\sigma} = \pm \tilde{\tau}$$

$$3^\circ) \quad \tau = \sigma i_w \text{ ou } \tau = \sigma(\alpha\beta)^2 i_w \text{ pour un } w \in F.$$

Démonstration. L'équivalence des assertions 1°) et 3°) est une simple reformulation du théorème II.1. L'équivalence de ces assertions avec la seconde résulte de la caractérisation, en termes de leurs matrices, des automorphismes intérieurs de F ([6]).

PROPOSITION 3. *Si σ est un endomorphisme de F , non injectif, il existe deux entiers m et n et un élément w de F tel que $\sigma(a) = w^m$ et $\sigma(b) = w^n$.*

Démonstration. On utilise la théorie de la réduction de Nielsen ([6], [7]). Etant donné $\sigma \in \text{Hom}(F, F)$ arbitraire, il existe un automorphisme μ de F tel que l'une des éventualités suivantes se produise:

1°) Le couple $(\sigma\mu(a), \sigma\mu(b))$ est réduit au sens de Nielsen,

2°) $\sigma\mu(a)$ est réduit au sens de Nielsen et $\sigma\mu(b) = e$.

3°) $\sigma\mu(a) = \sigma\mu(b) = e$.

Dans le premier cas $\sigma\mu$ est injectif, d'où la proposition.

LEMME 4. *Soit $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in (R[x, y, z])^3$ (où R est un domaine d'intégrité de caractéristique nulle) tel que l'on ait $\lambda \circ \psi = 0$. Alors, il existe $\tau \in \text{Aut } F$ tel que $\Phi_\tau \circ \psi$ ait sa première composante constante.*

Démonstration. On peut évidemment supposer que l'on a $d^0\psi_1 \leq d^0\psi_2 \leq d^0\psi_3$. La relation $\lambda \circ \psi = 0$ s'écrit $\psi_3(\psi_3 - \psi_1\psi_2) = 4 - \psi_1^2 - \psi_2^2$, d'où l'on déduit $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) \leq d^0\psi_2$. Supposons que l'on ait $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) \geq d^0\psi_3$. On a alors $d^0\psi_2 = d^0\psi_3$ et $d^0\psi_1 + d^0\psi_2 + d^0\psi_3 \leq 2d^0\psi_3$ et, donc, $\psi_1 = c \in R$. Par une procédure de descente analogue à celle de la démonstration du théorème II.4, par composition par divers Φ_τ on peut faire décroître $\deg \psi$ tant que l'une de ses composantes n'est pas constante.

THÉORÈME 5. *Pour $\sigma \in \text{Hom}(F, F)$, $Q_\sigma \equiv 0$ si et seulement si σ n'est pas injectif.*

Démonstration. Supposons σ non injectif. En vertu de la proposition 3, il existe $\mu \in \text{Aut } F$ tel que $\sigma\mu(b) = e$. Or, on sait que $Q_{\sigma\mu} = Q_\mu Q_\sigma \circ \Phi_\mu$. Or, il est facile de vérifier que $Q_{\sigma\mu} = 0$. Comme $Q_\mu \equiv 1$, cela implique $Q_\sigma \equiv 0$.

Supposons maintenant que l'on ait $Q_\sigma \equiv 0$. En vertu du lemme précédent, il existe $\tau \in \text{Aut } F$ tel que la première composante de $\Phi_{\tau\sigma}$ soit constante. Le lemme II.2 montre alors que $\tau\sigma(a) = e$, ce qui prouve que σ n'est pas injective.

V. AUTRES PROPRIÉTÉS DES POLYNÔMES Q_σ

THÉORÈME 1. *Pour tout $\sigma \in \text{End } F$, on a les faits suivants:*

1°) $Q_\sigma(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta) = (\det \sigma)^2$ pour tous $\varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}$.

2°) λ divise le polynôme $\det \Phi'_\sigma - (\det \sigma)Q_\sigma$.

Démonstration. Observons d'abord que si p et q sont deux entiers rationnels on a

$$P_{a^p b^q}(x, y, z) = zu_p(x)u_q(y) - xu_p(x)u_{q-1}(y) - yu_{p-1}(x)u_q(y) + 2u_{p-1}(x)u_{q-1}(y).$$

Si ε et η valent ± 1 , il est facile de vérifier que

$$P_{a^p b^q}(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta) = 2\varepsilon^p \eta^q$$

et de calculer le gradient de $P_{a^p b^q}$:

$$P'_{a^p b^q}(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta) = (\varepsilon p(p-q), \eta q(q-p), \varepsilon \eta pq) \varepsilon^p \eta^q.$$

Considérons maintenant un élément de σ de $\text{End } F$ dont la matrice est $\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. Ce qui précède montre que le point $(2, 2, 2)$ est point fixe pour Φ_σ et que l'ensemble $\{(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta); \varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}\}$ est globalement invariant par Φ_σ .

Démontrons la première assertion. Différentions deux fois la relation $\lambda \circ \Phi_\sigma = \lambda \cdot Q_\sigma$ au point $\omega = (2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta)$. On obtient

$${}^t\Phi'_\sigma(\omega)\lambda''(\Phi(\omega))\Phi'_\sigma(\omega) = \lambda''(\omega)Q_\sigma(\omega)$$

en ayant tenu compte de ce que $\lambda(\omega)$, $\lambda'(\omega)$ et $\lambda'(\Phi_\sigma(\omega))$ sont nuls. Par ailleurs, $\Phi_\sigma - (P_{apbq}, P_{arbs}, P_{ap+rbq+s})$ est un multiple de λ . Par conséquent, on obtient $\Phi'_\sigma(\omega)$ en différentiant en ω la fonction $(P_{apbq}, P_{arbs}, P_{ap+rbq+s})$. Tous calculs faits on obtient la première assertion.

Pour démontrer la seconde assertion, nous allons montrer que le polynôme $\det \Phi'_\sigma - (\det \sigma)Q_\sigma$ s'annule en suffisamment de points de Ω .

Considérons le point $\omega(t, u) = (2 \cos t, 2 \cos u, 2 \cos(t + u))$ de Ω . Son image par Φ_σ est le point $\omega(pt + qu, rt + su)$ que nous noterons $\omega \circ \tilde{\sigma}(t, u)$.

Par différentiation de la relation $\Phi_\sigma \circ \omega = \omega \circ \tilde{\sigma}$, on obtient

$$(\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t} \wedge (\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u} = (\det \sigma) \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \circ \tilde{\sigma} \right) \wedge \left(\frac{\partial \omega}{\partial u} \circ \tilde{\sigma} \right).$$

Par ailleurs, on établit facilement la relation

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} \wedge \frac{\partial \omega}{\partial u} = -\lambda' \circ \omega$$

où l'on a fait les identifications nécessaires.

La relation $\lambda \circ \Phi_\sigma = \lambda \cdot Q_\sigma$ donne par différentiation, en observant que $\lambda \circ \omega = 0$,

$$(\lambda' \circ \Phi_\sigma \circ \omega) (\Phi'_\sigma \circ \omega) V = (Q_\sigma \circ \omega) (\lambda' \circ \omega) \cdot V$$

où V est un vecteur arbitraire. Compte tenu des relations précédentes, ceci s'écrit encore

$$\det \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \circ \tilde{\sigma}, \frac{\partial \omega}{\partial u} \circ \tilde{\sigma}, (\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot V \right) = (Q_\sigma \circ \omega) \det \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}, \frac{\partial \omega}{\partial u}, V \right)$$

d'où

$$\begin{aligned} & \det \left((\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t}, (\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u}, (\Phi'_\sigma \circ \omega) \cdot V \right) \\ &= (\det \sigma) (Q_\sigma \circ \omega) \det \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}, \frac{\partial \omega}{\partial u}, V \right). \end{aligned}$$

Ceci montre l'égalité $\det(\Phi'_\sigma \circ \omega) = (\det \sigma) (Q_\sigma \circ \omega)$ en chaque point où le gradient de ω n'est pas nul.

THÉORÈME 2.

1. $Q_\sigma(0, 0, 0)$ vaut 0 ou 1 selon que $\det \sigma$ est pair ou impair.
2. $\Phi_\sigma(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ si et seulement si $\det \sigma$ est impair.
3. $Q'_\sigma(0, 0, 0) = 0$.
4. Si $\det \sigma$ est impair, $Q''_\sigma(0, 0, 0)$ est diagonal négatif.

Démonstration. Nous allons calculer $\Phi_\sigma(0, 0, z)$. Pour ce faire, considérons $\varphi \in \text{Hom}(F, SL(2, \mathbb{C}))$ tel que $\varphi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi(b) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^{-1} \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$, avec $\lambda + \lambda^{-1} = z$. On a évidemment $\varphi(a)^2 = \varphi(b)^2 = -1$ et, donc tout produit d'un certain nombre de $\varphi(a)$ et de $\varphi(b)$ est réductible à l'une des formes $\pm \varphi((ab)^n)$, $\pm \varphi((ab)^n a)$, $\pm \varphi((ba)^n)$ ou $\pm \varphi((ba)^n b)$ dont les traces respectives sont $\pm t_n(z)$, 0, $\pm t_n(z)$ et 0 (où t_n est un polynôme de Chebyshev de première espèce, cf. II).

Ceci nous conduit à définir le procédé suivant de réduction d'un élément de F : on remplace autant de fois qu'il est possible a^2 et b^2 par -1 . Ainsi le mot aba^2b^3 donne $-a$.

Réduisons ainsi les mots $\sigma(a)$ et $\sigma(b)$. On obtient respectivement $\varepsilon \bar{\sigma}(a)$ et $\eta \bar{\sigma}(b)$ où ε et η valent ± 1 . Nous pouvons dresser le tableau suivant qui donne, pour les différentes valeurs possibles de $\bar{\sigma}(a)$ et $\bar{\sigma}(b)$, en première ligne, $\Phi_\sigma(0, 0, z)$ et, en seconde, $Q_\sigma(0, 0, z)$ en termes des polynômes de Chebyshev t et u en la variable z .

$\bar{\sigma}(b)$ $\bar{\sigma}(a)$	$(ab)^n$	$(ab)^n a$	$(ba)^n$	$(ba)^n b$
$(ab)^m$	(t_m, t_n, t_{m+n}) 0	$(t_m, 0, 0)$ u_m^2	(t_m, t_n, t_{m-n}) 0	$(t_m, 0, 0)$ u_m^2
$(ab)^m a$	$(0, t_n, 0)$ u_n^2	$(0, 0, -t_{m-n})$ u_{m-n}^2	$(0, t_n, 0)$ u_n^2	$(0, 0, t_{m+n+1})$ u_{m+n+1}^2

$(ba)^m$	(t_m, t_n, t_{m-n}) 0	$(t_m, 0, 0)$ u_m^2	(t_m, t_n, t_{m+n}) 0	$(t_m, 0, 0)$ u_m^2
$(ba)^m b$	$(0, t_n, 0)$ u_n^2	$(0, 0, t_{m+n+1})$ u_{m+n+1}^2	$(0, t_n, 0)$ u_n^2	$(0, 0, -t_{m-n})$ u_{m-n}^2

On observe que $Q_\sigma(0, 0, z) = u_v(z)^2$ où $v = \det \bar{\sigma}$. Il est clair, par ailleurs, que $\det \sigma$ et $\det \bar{\sigma}$ ont même parité. La première assertion résulte alors de ce que $u_n(0) = \sin \frac{n\pi}{2}$.

La seconde assertion résulte de l'examen du tableau, compte tenu de ce que $t_n(0) = 2 \cos \frac{n\pi}{2}$.

La troisième assertion résulte simplement de la parité de u_n^2 .

Démontrons la dernière assertion. D'abord, il est facile de déterminer $\Phi_\sigma(x, 0, 0)$ et $\Phi_\sigma(0, y, 0)$. En effet soit $\tau = (a^{-1}, ab) \in \text{End } F$. On a $\Phi_\tau(x, y, z) = (x, z, y)$ et par conséquent $\Phi_{\sigma\tau}(x, y, z) = \Phi_\sigma(x, z, y)$, ce qui permet par le procédé précédent de déterminer $\Phi_\sigma(0, y, 0)$. De la même façon pour calculer $\Phi_\sigma(x, 0, 0)$ on utilise $\tau = (ab, b^{-1})$.

Supposons donc que $\det \sigma = 1 \pmod{2}$. Ce qui précède montre que deux des composantes de chacune des fonctions $\Phi_\sigma(x, 0, 0)$, $\Phi_\sigma(0, y, 0)$ et $\Phi_\sigma(0, 0, z)$ sont nulles alors que les troisièmes sont de la forme $\pm p_{n_1}(x)$, $\pm p_{n_2}(y)$, $\pm p_{n_3}(z)$ respectivement, les entiers n_1, n_2, n_3 étant impairs. Par ailleurs, en vertu du théorème 1, compte tenu de $Q_\sigma(0, 0, 0) = 1$, on a $\det \Phi'_\sigma(0, 0, 0) = 1 \pmod{2}$. Comme $p'_{n_i}(0) = n_i \sin \frac{n_i\pi}{2} \neq 0$ (pour $i = 1, 2, 3$),

on en déduit que la matrice $\Phi'_\sigma(0, 0, 0)$ a un terme non nul et un seul aussi bien dans chaque ligne que dans chaque colonne et que ses termes non nuls sont, aux signes près, n_1, n_2 et n_3 . Autrement dit ${}^t\Phi'_\sigma(0, 0, 0)\Phi'_\sigma(0, 0, 0)$ est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont des carrés de nombres impairs.

Différentions maintenant deux fois à l'origine la relation $\lambda \circ \Phi_\sigma = \lambda \cdot Q_\sigma$. On obtient

$${}^t\Phi'_\sigma(0, 0, 0)\lambda''(0)\Phi'_\sigma(0, 0, 0) = \lambda''(0) - 4Q''_\sigma(0, 0, 0)$$

en ayant tenu compte des relations $\lambda(0, 0, 0) = -4$ et $\lambda'(0, 0, 0) = 0$. La

conclusion résulte de $\lambda''(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Prenons un exemple: $\sigma = (aba^2b^2a, aba^3bab)$. Calculons $\Phi_\sigma(0, 0, z)$. La réduction de σ donne $(aba, -(ab)^3)$ donc

$$\Phi_\sigma(0, 0, z) = (0, -t_3(z), 0) = (0, 3z - z^3, 0)$$

et

$$Q_\sigma(0, 0, z) = u_3(z)^2 = (z^2 - 1)^2.$$

Pour calculer $\Phi_\sigma(x, 0, 0)$, multiplions σ par (ab, b^{-1}) , on obtient $(babab, bab)$, qui est réduit. Donc

$$\Phi_\sigma(x, 0, 0) = (0, 0, -t_1(x)) = (0, 0, -x)$$

et

$$Q_\sigma(x, 0, 0) = u_1(x)^2 = 1.$$

De façon analogue, on obtient

$$\Phi_\sigma(0, y, 0) = (p_3(y), 0, 0) = (y^3 - 3y, 0, 0)$$

et

$$Q_\sigma(0, y, 0) = (y^2 - 1)^2.$$

Ensuite on a

$$-2Q''_\sigma(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - I$$

d'où

$$Q''_\sigma(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

VI. CAS D'UN GROUPE LIBRE À PLUS DE DEUX GÉNÉRATEURS

Avant de passer à la généralisation partielle de ce qui précède, nous avons besoin d'un certain nombre de lemmes sur $SL(2, \mathbb{C})$.

LEMME 1. Soit A et B deux éléments de $SL(2, \mathbb{C})$. On a

$$ABA = A \operatorname{tr} AB - B^{-1}$$

et
$$\operatorname{tr}(ABA) = (\operatorname{tr} A) (\operatorname{tr} AB) - (\operatorname{tr} B).$$

Démonstration. On a, par Cayley-Hamilton, $AB + (AB)^{-1} = \operatorname{tr} AB$, d'où

$$ABA + B^{-1} = A \operatorname{tr} AB.$$

LEMME 2 (Formule de Fricke). Si A et B sont deux éléments de $SL(2, \mathbb{C})$, on a

$$\operatorname{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) = (\operatorname{tr} A)^2 + (\operatorname{tr} B)^2 + (\operatorname{tr} AB)^2 - (\operatorname{tr} A) (\operatorname{tr} B) (\operatorname{tr} AB) - 2.$$

Démonstration. Une utilisation répétée du théorème de Cayley-Hamilton suivie de celle du lemme précédent donne

$$\begin{aligned} ABA^{-1}B^{-1} &= AB(\operatorname{tr} AB - BA) \\ &= AB \operatorname{tr} AB - A(B \operatorname{tr} B - 1)A \\ &= AB \operatorname{tr} AB - (A \operatorname{tr} AB - B^{-1}) \operatorname{tr} B + A \operatorname{tr} A - 1 \end{aligned}$$

d'où le résultat, en prenant les traces des deux membres.

Considérons maintenant trois éléments A_1, A_2, A_3 de $SL(2, \mathbb{C})$ dont les traces sont respectivement x_1, x_2 et x_3 . On note y_1, y_2 et y_3 les traces de A_2A_3, A_3A_1 et A_1A_2 .

LEMME 3. On a $\operatorname{tr} A_1A_2A_3 + \operatorname{tr} A_1A_3A_2 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_1x_2x_3$.

Démonstration. En vertu du lemme I.1, on a

$$A_2A_3 + A_3A_2 = y_1 - x_2x_3 + x_3A_2 + x_2A_3$$

d'où

$$A_1A_2A_3 + A_1A_3A_2 = (y_1 - x_2x_3)A_1 + x_3A_1A_2 + x_2A_1A_3,$$

d'où le résultat.

LEMME 4. On a

$$\begin{aligned} &(\operatorname{tr} A_1A_2A_3) (\operatorname{tr} A_1A_3A_2) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - x_1x_2y_3 - x_2x_3y_1 - x_3x_1y_2 + y_1y_2y_3 - 4. \end{aligned}$$

Démonstration. Utilisant le lemme 1 de deux façons, on obtient

$$\begin{aligned} A_1 A_2 A_3 A_1 A_3 A_2 &= (A_1 \operatorname{tr}(A_1 A_2 A_3) - A_3^{-1} A_2^{-1}) A_3 A_2 \\ &= A_1 A_2 (y_2 A_3 - A_1^{-1}) A_2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} A_1 A_3 A_2 \operatorname{tr}(A_1 A_2 A_3) &= A_3^{-1} A_2^{-1} A_3 A_2 + y_2 A_1 A_2 A_3 A_2 - A_1 A_2 A_1^{-1} A_2 \\ &= A_3^{-1} A_2^{-1} A_3 A_2 + y_2 A_1 (y_1 A_2 - A_3^{-1}) \\ &\quad - A_1 (A_2 \operatorname{tr}(A_2 A_1^{-1}) - A_1) \\ &= A_3^{-1} A_2^{-1} A_3 A_2 + y_2 A_1 (y_1 A_2 - x_3 + A_3) \\ &\quad - A_1 A_2 (x_1 x_2 - y_3) + x_1 A_1 - 1, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

COROLLAIRE 5. *Les nombres $\operatorname{tr}(A_1 A_2 A_3)$ et $\operatorname{tr}(A_1 A_3 A_2)$ sont les racines de l'équation suivante, dont l'inconnue est z :*

$$z^2 - p(X, Y)z + q(X, Y) = 0$$

où

$$p(X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_1 x_2 x_3$$

et

$$\begin{aligned} q(X, Y) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - x_1 x_2 y_3 - x_2 x_3 y_1 \\ &\quad - x_3 x_1 y_2 + y_1 y_2 y_3 - 4. \end{aligned}$$

Nous venons de définir les polynômes p et q en les variables $X = (x_1, x_2, x_3)$ et $Y = (y_1, y_2, y_3)$. Posons

$$\Lambda(X, Y, z) = z^2 - p(X, Y)z + q(X, Y).$$

PROPOSITION 6. *Le polynôme Λ est irréductible dans $\mathbf{C}[X, Y, z]$.*

Démonstration. Si Λ était décomposable, le polynôme $p^2 - 4q$ serait un carré dans $\mathbf{C}[X, Y]$. Il en serait de même du polynôme $(p^2 - 4q)(0, 0, 0, y_1, y_2, y_3)$ dans $\mathbf{C}[y_1, y_2, y_3]$. Or $(p^2 - 4q)(0, 0, 0, y_1, y_2, y_3)$ est de degré 3, c'est donc impossible.

Notons V la sous-variété algébrique de \mathbf{C}^7 , ensemble des zéros de Λ . Elle est irréductible.

Désignons par T l'application de $[SL(2, \mathbf{C})]^3$ dans \mathbf{C}^7 ainsi définie:

$$T(A_1, A_2, A_3) = (\operatorname{tr} A_1, \operatorname{tr} A_2, \operatorname{tr} A_3, \operatorname{tr} A_2 A_3, \operatorname{tr} A_3 A_1, \operatorname{tr} A_1 A_2, \operatorname{tr} A_1 A_2 A_3).$$

Il résulte du corollaire 5 que l'image de T est contenue dans la variété V .

PROPOSITION 7. *L'image de T est la variété V .*

Démonstration. Donnons-nous un point $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z) \in V$. Nous avons à construire trois matrices A_1, A_2, A_3 telles que $T(A_1, A_2, A_3) = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z)$. Nous allons distinguer plusieurs cas

— l'une des expressions $\lambda(x_1, x_2, y_3)$, $\lambda(x_2, x_3, y_1)$, $\lambda(x_3, x_1, y_2)$ n'est pas nulle.

Traisons le cas où $\lambda(x_1, x_2, y_3) \neq 0$. Prenons

$$A_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\tau^{-1} \\ \tau & x_2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} t & u \\ v & x_3 - t \end{pmatrix}.$$

Nous devons en outre avoir

$$\begin{aligned} tx_1 + v - u &= y_2 \\ -\tau^{-1}v + \tau u + x_2(x_3 - t) &= y_1 \\ \tau t + (x_2 - \tau^{-1}x_1)v + \tau^{-1}(x_3 - t) &= z \\ \tau + \tau^{-1} &= y_3 \\ t(x_3 - t) - uv &= 1. \end{aligned}$$

Les trois premières équations forment un système linéaire en t, u, v dont le déterminant, compte tenu de la quatrième équation, vaut $-\lambda(x_1, x_2, y_3)$, qui est non nul par hypothèse. La compatibilité avec la dernière équation est assurée par la relation

$$\Lambda(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z) = 0.$$

— $\lambda(x_1, x_2, y_3) = \lambda(x_2, x_3, y_1) = \lambda(x_3, x_1, y_2) = 0$ et l'un au moins des $|x_i|$ est différent de 2.

Traisons le cas $|x_1| \neq 2$.

On vérifie que l'on peut prendre les trois matrices soit sous la forme

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 1 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ w & v^{-1} \end{pmatrix},$$

soit sous la forme

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 1 & u^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & w \\ 0 & v^{-1} \end{pmatrix}.$$

— Enfin dans le dernier cas, on peut choisir pour A_1, A_2, A_3 les matrices $\pm I, \pm I, \pm I$.

PROPOSITION 8. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. A_1, A_2, A_3 ont une direction propre commune.
2. $\lambda(x_1, x_2, y_3) = \lambda(x_2, x_3, y_1) = \lambda(x_3, x_1, y_2) = 0$ et $\text{tr } A_1 A_2 A_3 = \text{tr } A_1 A_3 A_2$.
3. $\lambda(x_1, x_2, y_3) = \lambda(x_2, x_3, y_1) = \lambda(x_3, x_1, y_2) = \delta(X, Y) = 0$
où $\delta = p^2 - 4q$.

Démonstration. Clairement les assertions 2 et 3 sont équivalentes et sont impliquées par la première.

Supposons donc que l'on ait $\lambda(x_1, x_2, y_3) = \lambda(x_2, x_3, y_1) = \lambda(x_3, x_1, y_2) = 0$ et que A_1, A_2, A_3 n'aient pas de direction propre commune. Comme les opérateurs A_1, A_2, A_3 ont deux à deux une direction propre commune, on peut dans une base convenable les représenter par des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & \xi \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} v & 0 \\ \zeta & v^{-1} \end{pmatrix} \text{ avec } \zeta \xi \neq 0 \text{ et } t \neq \pm 1.$$

On vérifie alors que $\text{tr } A_1 A_2 A_3 = tuv + (tuv)^{-1} + \zeta \xi t$ et $\text{tr } A_1 A_3 A_2 = tuv + (tuv)^{-1} + \zeta \xi t^{-1}$. Et donc $\text{tr } A_1 A_2 A_3 \neq \text{tr } A_1 A_3 A_2$. Ceci achève la démonstration.

Nous pouvons maintenant envisager de généraliser la section I au cas d'un groupe libre ayant un nombre fini de générateurs. Nous considérons d'abord le cas de F_3 , le groupe libre engendré par a_1, a_2, a_3 . Si φ est un homomorphisme de F_3 dans $SL(2, \mathbb{C})$, nous poserons

$$T\varphi = T(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \varphi(a_3)).$$

PROPOSITION 9. *Si $w \in F_3$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X, Y, z]$, unique modulo Λ , tel que pour tout $\varphi \in \text{Hom}(F_3, SL(2, \mathbb{C}))$ on ait*

$$\text{tr}(w) = P(T\varphi).$$

Démonstration. L'existence se démontre par application répétée du théorème de Cayley-Hamilton et du lemme I.1. L'unicité résulte de la proposition 7.

THÉORÈME 10. *Si σ est un endomorphisme de F_3 , il existe une unique application polynomiale Φ_σ de V dans V telle que, pour tout $\varphi \in \text{Hom}(F_3, SL(2, \mathbb{C}))$ on ait*

$$T(\varphi \circ \sigma) = \Phi_\sigma(T\varphi).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente aux éléments $\sigma(a_1), \sigma(a_2), \sigma(a_3), \sigma(a_2 a_3), \sigma(a_3 a_1), \sigma(a_1 a_2)$ et $\sigma(a_1 a_2 a_3)$ de F_3 .

COROLLAIRE 11. Si σ et τ sont deux endomorphismes de F_3 , et si l'on pose $\sigma\tau = \tau \circ \sigma$, on a $\Phi_{\sigma\tau} = \Phi_\sigma \circ \Phi_\tau$.

PROPOSITION 12. Soit Ω la sous-variété de V définie par $\Lambda(X, Y, z) = 0$, $\lambda(x_1, x_2, y_3) = \lambda(x_2, x_3, y_1) = \lambda(x_3, x_1, y_2) = \delta(X, Y) = 0$. Alors Ω est invariante par toute application Φ_σ .

Démonstration. Ceci résulte de la proposition 8.

Les calculs sur F_n , le groupe libre engendré par a_1, a_2, \dots, a_n , sont moins explicites. Soit I l'ensemble des parties non vides de $\{1, 2, \dots, n\}$. Un élément i de I est la donnée de ses éléments i_1, i_2, \dots, i_k ordonnés en croissant. Pour chaque $\varphi \in \text{Hom}(F_n, SL(2, \mathbb{C}))$, on note $T\varphi$ la collection $\{\text{tr } \varphi(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k})\}_{i \in I}$, qui ne dépend que de la classe de la représentation φ . On sait que l'ensemble des classes de représentations est une variété algébrique [2]. Sa dimension est $3(n-1)$. On peut le voir en observant que, sauf cas exceptionnels, on peut, étant donné $\varphi \in \text{Hom}(F_n, SL(2, \mathbb{C}))$, fixer une base de \mathbb{C}^2 de façon que les matrices de $\varphi(a_1)$ et $\varphi(a_2)$ aient la forme $\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -t^{-1} \\ t & x_2 \end{pmatrix}$. Les autres éléments $\varphi(a_3), \dots, \varphi(a_n)$ dépendent

alors de $3(n-2)$ paramètres. Une application répétée du théorème de Cayley-Hamilton et de la proposition I.1 montre alors l'analogie de la proposition 9: étant donné $w \in F_n$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[(x_i)_{i \in I}]$, unique modulo un certain idéal définissant une sous-variété algébrique de dimension $3(n-1)$ de \mathbb{C}^I , tel que, pour tout $\varphi \in \text{Hom}(F_n, SL(2, \mathbb{C}))$, on ait $\text{tr } \varphi(w) = P(T\varphi)$.

Pour chaque $\sigma \in \text{End}(F_n)$ on définit de même que précédemment une application Φ_σ . Les applications Φ_σ laissent invariante une variété (celle qui est définie, en termes de traces, par le fait que n matrices 2×2 aient une direction propre commune).

Des résultats analogues sur F_n ont déjà été obtenus par Kolar et Nori [4]. On doit cependant observer qu'ils utilisent beaucoup trop de variables et qu'ils ne se sont pas préoccupés des questions d'unicité.

Dans deux articles à venir, l'un des auteurs donne un procédé général pour obtenir des relations entre les traces de matrice $p \times p$ et de leurs produits et traite le cas où au lieu de considérer les représentations d'un groupe libre dans $SL(2, \mathbb{C})$ on envisage des représentations dans $SL(3, \mathbb{C})$.

Terminons par une dernière remarque. Au lieu de considérer des représentations de F dans $SL(2, \mathbb{C})$, on peut utiliser des représentations dans $GL(2, \mathbb{C})$. En effet, à cause de l'homogénéité, le lemme I.1 est valable sans restriction

sur les déterminants. Par ailleurs, pour une matrice 2×2 , A , le théorème de Cayley-Hamilton s'écrit

$$A^2 - A(\operatorname{tr} A) + \frac{1}{2} [(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr} A^2] = 0.$$

Donc, si A_1, A_2, \dots, A_n sont n matrices 2×2 inversibles, par une méthode analogue à celle que nous avons développée, tout produit de la forme $X_1^{n_1} X_2^{n_2} \dots X_k^{n_k}$ (avec $n_j \in \mathbb{Z}$ et $X_j \in \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ pour $j = 1, 2, \dots, n$) a une trace qui s'exprime comme fraction rationnelle à coefficients entiers en les traces des produits $\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}\}_{i \in I}$ et les traces des matrices $\{A_j^2\}_{j=1,2,\dots,n}$.

NOTE AJOUTÉE SUR ÉPREUVES

Au moment de corriger les épreuves, les auteurs ont eu connaissance d'un certain nombre de travaux antérieurs ([9] à [16]) sur le même sujet.

L'existence de P_ω a été prouvée par Horowitz [9]. L'application induite Φ_σ a été considérée (seulement dans le cas où σ est un isomorphisme) également par Horowitz [10] qui a aussi déterminé le noyau de Φ . La considération du polynôme Q_σ est nouvelle. Le lemme 2 de la section II se trouve dans [15].

Certaines démonstrations données ici sont plus simples que celles de Horowitz, bien qu'il y ait des recouvrements. Alors que Horowitz n'utilise que des relations entre traces, nos calculs prennent place dans l'algèbre introduite par Procesi [13] et Razmyslov [14], ce qui simplifie considérablement les calculs. D'ailleurs, Magnus [12] fait allusion à la complexité des démonstrations de certaines identités (par exemple, les lemmes 3 et 4 de la section VI) et demande s'il est possible de les simplifier. Signalons qu'une description complète de l'idéal des relations entre traces a été donnée par Whittemore [16] dans le cas d'un groupe libre à quatre générateurs.

Les articles [11], [13] et [14] traitent des identités pour les matrices $n \times n$.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] ALLOUCHE, J.-P. et J. PEYRIÈRE. Sur une formule de récurrence sur les traces de produits de matrices associées à certaines substitutions. *C. R. Acad. Sc. Paris* 302 (II) (1986), 1135-1136.
- [2] CULLER, Marc and Peter B. SHALEN. Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds. *Ann. of Math.* 117 (1983), 109-146.
- [3] KOLAR, M. and M. K. ALI. Preprint, University of Lethbridge, January 22, 1990; Trace maps associated with general two-letter substitution rules. *Phys. Rev. A*, submitted.

- [4] KOLAR, M. and F. NORI. Trace maps of general substitutional sequences. *Phys. Rev. B* 42 (1990), 1062-1065.
- [5] NEUMANN, B. H. Die Automorphismengruppe der freien. *Math. Ann.* 107 (1933), 367-386.
- [6] NIELSEN, J. Die Isomorphismen der allgemeinen unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden. *Math. Ann.* 78 (1918), 385-397.
- [7] — Die Isomorphismen der freien Gruppen. *Math. Ann.* 91 (1924), 169-209.
- [8] PEYRIÈRE, J. On the trace map for products of matrices associated with substitutive sequences. *J. Stat. Phys.* 62 (1991), 411-414.
- [9] HOROWITZ, R. D. Characters of Free Groups Represented in the Two-Dimensional Special Linear Group. *Comm. Pure and Applied Math.* 25 (1972), 635-649.
- [10] — Induced automorphisms on Fricke Characters of Free Groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* 208 (1975), 41-50.
- [11] LERON, U. Trace Identities and Polynomial Identities of $n \times n$ Matrices. *J. of Algebra* 42 (1976), 369-377.
- [12] MAGNUS, W. Rings of Fricke Characters and Automorphism Groups of Free Groups. *Math. Z.* 170 (1980), 91-103.
- [13] PROCESI, C. The Invariant Theory of $n \times n$ Matrices. *Advances in Math.* 19 (1976), 306-381.
- [14] RAZMYSLOV, Ju. P. Trace Identities of Full Matrix Algebras over a Field of Characteristic Zero. *Izv. Akad. Nauk SSSR ser. Mat.* 38 (1974) No. 4 (en russe); English translation: *Math. USSR Izvestija* 8 (1974), 727-760.
- [15] TRAINA, C. *Representation of the Trace Polynomial of Cyclically Reduced Words in a Free Group on Two Generators*. Ph.D. Thesis, Polytechnic Institute of New York.
- [16] WHITTEMORE, A. On Special Linear Characters of Free Groups of Rank $n \geq 4$. *Proc. Amer. Math. Soc.* 40 (1973), 383-388.

(Reçu le 16 avril 1992)

Jacques Peyrière

CNRS URA D0757
 Université de Paris Sud
 Mathématiques - Bâtiment 425
 91405 Orsay Cedex (France)

Wen Zhi-Ying et Wen Zhi-Xiong

Université de Wuhan
 Mathématiques
 Wuhan, Hubei
 (République Populaire de Chine)

Vide-leer-empty