

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 39 (1993)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** GÈBRES  
**Autor:** Serre, Jean-Pierre  
**Kapitel:** §5  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-60413>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 19.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

le revêtement de  $\mathbf{SL}_2(K)$  défini par C. Moore et T. Kubota; on a une suite exacte

$$\{1\} \rightarrow \mu \rightarrow S \rightarrow \mathbf{SL}_2(K) \rightarrow \{1\}$$

et  $S$  est son propre groupe dérivé. Montrer que toute représentation  $K$ -linéaire analytique du groupe de Lie  $S$  est triviale sur  $\mu$ ; en déduire que  $\mathbf{SL}_2$  est l'enveloppe de  $S$ . (Si  $G$  est l'enveloppe de  $S$ , remarquer que la suite

$$\mu \rightarrow G \rightarrow \mathbf{SL}_2 \rightarrow \{1\}$$

est exacte (cf. exercice 5). Utiliser ensuite le fait que  $\mathbf{SL}_2$  est simplement connexe.)

## § 5

1) Etendre la prop. 1 au cas d'un groupe compact  $K$  opérant continûment sur un espace vectoriel réel  $V$  de dimension finie, chacune des opérations de  $K$  étant *polynomiale*. (On montrera d'abord, au moyen du théorème de Baire, que le degré de ces opérations est borné.)

2) Soit  $H$  un sous-groupe algébrique réel de  $\mathbf{GL}_n$ . Montrer que  $H$  est anisotrope si et seulement si il existe une forme quadratique positive non dégénérée sur  $\mathbf{R}^n$  qui est invariante par  $H$ .

3) a) Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire réel, et soit  $H$  un sous-groupe algébrique distingué de  $G$ . On suppose que  $H$  et  $G/H$  sont anisotropes, et que  $G/H$  est connexe. Montrer que  $G$  est anisotrope.

b) On prend pour  $G$  le groupe des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  avec  $(a^2 + b^2)^2 = 1$  et pour  $H$  le sous-groupe de celles pour lesquelles  $a^2 + b^2 = 1$ . Le groupe  $G/H$  s'identifie au groupe «constant»  $\{\pm 1\}$ . Montrer que  $H$  et  $G/H$  sont anisotropes et que  $G$  ne l'est pas.

4) Avec les notations de la prop. 7, montrer que l'injection de  $V(\mathbf{R})$  dans  $V(\mathbf{C})$  est une «équivalence d'homotopie». (Il suffit de voir que  $\pi_i(V(\mathbf{R})) \rightarrow \pi_i(V(\mathbf{C}))$  est un isomorphisme pour tout  $i$ ; utiliser le lemme des cinq pour se ramener à l'énoncé analogue pour  $G$  et  $H$ .) [Exercice: donner explicitement une «rétraction de déformation» de  $V(\mathbf{C})$  sur  $V(\mathbf{R})$ .]

En particulier, la quadrique complexe d'équation  $\sum z_i^2 = 1$  a même type d'homotopie que l'ensemble de ses points réels; énoncer des résultats analogues pour les variétés de Stiefel, etc.

5) (Cet exercice pourrait remonter au chapitre III du livre de Lie.)

Soit  $A$  un groupe de Lie complexe, commutatif, connexe, d'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$ ; soit  $\Lambda$  le noyau de  $\exp: \mathfrak{a} \rightarrow A$ , de sorte que  $A$  s'identifie à  $\mathfrak{a}/\Lambda$ .

a) Démontrer l'équivalence de:

- a<sub>1</sub>) L'application canonique  $\mathbf{C} \otimes \Lambda \rightarrow \mathfrak{a}$  est injective.
- a<sub>2</sub>)  $A$  est isomorphe à un sous-groupe de Lie d'un  $(\mathbf{C}^*)^n$ .
- a<sub>3</sub>)  $A$  est isomorphe à un groupe  $(\mathbf{C}^*)^p \times \mathbf{C}^q$ .
- a<sub>4</sub>)  $A$  possède une représentation linéaire complexe fidèle.
- a<sub>5</sub>)  $A$  possède une représentation linéaire complexe fidèle semi-simple d'image fermée.

b) Démontrer l'équivalence de:

- b<sub>1</sub>) L'application  $\mathbf{C} \otimes \Lambda \rightarrow \mathfrak{a}$  est surjective.
- b<sub>2</sub>)  $A$  est isomorphe à un quotient d'un groupe  $(\mathbf{C}^*)^n$ .
- b<sub>3</sub>) Aucun facteur direct de  $A$  n'est isomorphe à  $\mathbf{C}$ .
- b<sub>4</sub>) Toute représentation linéaire complexe de  $A$  est semi-simple.

c) Démontrer l'équivalence de:

- c<sub>1</sub>) L'application  $\mathbf{C} \otimes \Lambda \rightarrow \mathfrak{a}$  est bijective.
- c<sub>2</sub>)  $A$  est isomorphe à un  $(\mathbf{C}^*)^n$ .

d) Soit  $F$  un sous-groupe fini de  $A$ , et soit  $A' = A/F$ . Montrer que  $A$  vérifie les conditions  $a_i$ ) (resp.  $b_i$ ),  $c_i$ )) si et seulement si  $A'$  les vérifie.