

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 39 (1993)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÈBRES
Autor: Serre, Jean-Pierre
Kapitel: §1
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-60413>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

[On obtient ainsi des bigèbres sur \mathbf{C} ; à ces bigèbres correspondent des schémas en groupes; à ces schémas en groupes correspondent des groupes de Lie complexes; à ces groupes... Voyez, voyez, la machine tourner!]

EXERCICES

§ 1

1) Soit E un K -module projectif de type fini. On identifie $\text{End}(E)$ à $E \otimes E'$; on note I l'élément de $E \otimes E'$ correspondant à 1_E , et ${}^t I$ son image dans $E' \otimes E$.

On munit $E \otimes E' = \text{End}(E)$ de la structure de cogèbre *opposée* à celle définie au n° 1.1.

- a) Si $x = a \otimes a' \in E \otimes E'$, montrer que $d(x) = a \otimes {}^t I \otimes a'$.
- b) On définit une application $d_E: E \rightarrow \text{End}(E) \otimes E = E \otimes E' \otimes E$ par $a \mapsto a \otimes {}^t I$. Montrer que cette application définit sur E une structure de comodule à gauche sur $\text{End}(E)$.
- c) On identifie $\text{End}(E) \otimes \text{End}(E)$ à $\text{End}(E \otimes E)$ par l'application $(u, v) \mapsto u \otimes v$. D'autre part, si on écrit $\text{End}(E \otimes E)$ sous la forme $E \otimes E \otimes E' \otimes E'$ la permutation des deux facteurs E' définit un automorphisme σ de $\text{End}(E \otimes E)$. Montrer que l'on a

$$d(u) = \sigma(u \otimes 1_E) \quad \text{si} \quad u \in \text{End}(E) .$$

- d) Soit (v_i) une base de E , et soit $(E_{ij} = v'_j \otimes v_i)$ la base correspondante de $\text{End}(E)$. Montrer que

$$d(E_{ij}) = \sum_k E_{ik} \otimes E_{kj} .$$

- e) Justifier la Remarque 2 du n° 1.2.

2) Soit C une cogèbre plate, et soit E un comodule sur C .

- a) Soit V un K -module tel que E soit isomorphe (comme module) à un quotient de E . Montrer qu'il existe un sous-comodule F de $C \otimes V$ tel que E soit isomorphe (comme comodule) à un quotient de F . (Utiliser le morphisme $C \otimes V \rightarrow C \otimes E$ et le fait que E est isomorphe à un sous-comodule de $C \otimes E$.) Montrer que, si K est noethérien, et E de type fini, on peut choisir F de type fini.

b) On suppose que K est un anneau de Dedekind. Montrer que tout comodule E de type fini est quotient d'un comodule F qui est projectif de type fini. (Utiliser a) en prenant pour V un module libre de sorte que F soit sans torsion.)

§ 2

1) Soit $x \in C$ tel que $d_E(x) = x \otimes x$ et $e(x) = 1$. On note K_x le module K muni de la structure de comodule définie par

$$y \mapsto x \otimes y.$$

Prouver l'équivalence des propriétés suivantes:

- a) K_x est le seul objet simple de Com_C^f (à isomorphisme près).
- b) Toute sous-cogèbre de C non réduite à 0 contient x .
- c) Le comodule C est extension essentielle du sous-comodule Kx (i.e. tout sous-comodule de C différent de 0 contient x).
- d) L'algèbre profinie A duale de C est un anneau local d'idéal maximal le noyau de l'homomorphisme $a \mapsto \langle x, a \rangle$ de A dans K .

[Noter que c) signifie ceci: le comodule C est *l'enveloppe injective* du comodule simple Kx .]

§ 3

1) Avec les notations du n° 3.4, montrer sans utiliser la prop. 4 que la formule (iii) est conséquence des formules (i) et (ii).

2) Les notations étant celles du n° 3.4, on suppose K parfait. Soit g un automorphisme du foncteur v . Pour tout objet E de Com_C^f , soit s_E (resp. u_E) la composante semi-simple (resp. unipotente) de $g(E)$. Montrer que $E \mapsto s_E$ et $E \mapsto u_E$ sont des automorphismes du foncteur v . Si g vérifie les relations (i) et (ii), montrer qu'il en est de même pour s et u . Déduire de là la décomposition des éléments de $G(K)$ en produits d'éléments semi-simples et unipotents commutant entre eux (dans le cas où G est un schéma en groupes).