

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 39 (1993)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** GÈBRES  
**Autor:** Serre, Jean-Pierre  
**Kapitel:** Exercices  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-60413>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

[On obtient ainsi des bigèbres sur  $\mathbf{C}$ ; à ces bigèbres correspondent des schémas en groupes; à ces schémas en groupes correspondent des groupes de Lie complexes; à ces groupes... Voyez, voyez, la machine tourner!]

## EXERCICES

### § 1

1) Soit  $E$  un  $K$ -module projectif de type fini. On identifie  $\text{End}(E)$  à  $E \otimes E'$ ; on note  $I$  l'élément de  $E \otimes E'$  correspondant à  $1_E$ , et  $'I$  son image dans  $E' \otimes E$ .

On munit  $E \otimes E' = \text{End}(E)$  de la structure de cogèbre *opposée* à celle définie au n° 1.1.

- a) Si  $x = a \otimes a' \in E \otimes E'$ , montrer que  $d(x) = a \otimes 'I \otimes a'$ .
- b) On définit une application  $d_E: E \rightarrow \text{End}(E) \otimes E = E \otimes E' \otimes E$  par  $a \mapsto a \otimes 'I$ . Montrer que cette application définit sur  $E$  une structure de comodule à gauche sur  $\text{End}(E)$ .
- c) On identifie  $\text{End}(E) \otimes \text{End}(E)$  à  $\text{End}(E \otimes E)$  par l'application  $(u, v) \mapsto u \otimes v$ . D'autre part, si on écrit  $\text{End}(E \otimes E)$  sous la forme  $E \otimes E \otimes E' \otimes E'$  la permutation des deux facteurs  $E'$  définit un automorphisme  $\sigma$  de  $\text{End}(E \otimes E)$ . Montrer que l'on a

$$d(u) = \sigma(u \otimes 1_E) \quad \text{si} \quad u \in \text{End}(E) .$$

- d) Soit  $(v_i)$  une base de  $E$ , et soit  $(E_{ij} = v'_j \otimes v_i)$  la base correspondante de  $\text{End}(E)$ . Montrer que

$$d(E_{ij}) = \sum_k E_{ik} \otimes E_{kj} .$$

- e) Justifier la Remarque 2 du n° 1.2.

2) Soit  $C$  une cogèbre plate, et soit  $E$  un comodule sur  $C$ .

- a) Soit  $V$  un  $K$ -module tel que  $E$  soit isomorphe (comme module) à un quotient de  $E$ . Montrer qu'il existe un sous-comodule  $F$  de  $C \otimes V$  tel que  $E$  soit isomorphe (comme comodule) à un quotient de  $F$ . (Utiliser le morphisme  $C \otimes V \rightarrow C \otimes E$  et le fait que  $E$  est isomorphe à un sous-comodule de  $C \otimes E$ .) Montrer que, si  $K$  est noethérien, et  $E$  de type fini, on peut choisir  $F$  de type fini.

b) On suppose que  $K$  est un anneau de Dedekind. Montrer que tout comodule  $E$  de type fini est quotient d'un comodule  $F$  qui est projectif de type fini. (Utiliser a) en prenant pour  $V$  un module libre de sorte que  $F$  soit sans torsion.)

## § 2

1) Soit  $x \in C$  tel que  $d_E(x) = x \otimes x$  et  $e(x) = 1$ . On note  $K_x$  le module  $K$  muni de la structure de comodule définie par

$$y \mapsto x \otimes y.$$

Prouver l'équivalence des propriétés suivantes:

- a)  $K_x$  est le seul objet simple de  $\text{Com}_C^f$  (à isomorphisme près).
- b) Toute sous-cogèbre de  $C$  non réduite à 0 contient  $x$ .
- c) Le comodule  $C$  est extension essentielle du sous-comodule  $Kx$  (i.e. tout sous-comodule de  $C$  différent de 0 contient  $x$ ).
- d) L'algèbre profinie  $A$  duale de  $C$  est un anneau local d'idéal maximal le noyau de l'homomorphisme  $a \mapsto \langle x, a \rangle$  de  $A$  dans  $K$ .

[Noter que c) signifie ceci: le comodule  $C$  est *l'enveloppe injective* du comodule simple  $Kx$ .]

## § 3

1) Avec les notations du n° 3.4, montrer sans utiliser la prop. 4 que la formule (iii) est conséquence des formules (i) et (ii).

2) Les notations étant celles du n° 3.4, on suppose  $K$  parfait. Soit  $g$  un automorphisme du foncteur  $v$ . Pour tout objet  $E$  de  $\text{Com}_C^f$ , soit  $s_E$  (resp.  $u_E$ ) la composante semi-simple (resp. unipotente) de  $g(E)$ . Montrer que  $E \mapsto s_E$  et  $E \mapsto u_E$  sont des automorphismes du foncteur  $v$ . Si  $g$  vérifie les relations (i) et (ii), montrer qu'il en est de même pour  $s$  et  $u$ . Déduire de là la décomposition des éléments de  $G(K)$  en produits d'éléments semi-simples et unipotents commutant entre eux (dans le cas où  $G$  est un schéma en groupes).

Utiliser le même procédé pour obtenir la décomposition des éléments de l'algèbre de Lie de  $G$  en sommes d'éléments semi-simples et nilpotents commutant entre eux.

[Cette décomposition n'a en fait rien à voir avec les bigèbres. On aurait pu la donner au § 2.]

3) On suppose que  $G = \text{Spec}(C)$  est un schéma en groupes. Prouver l'équivalence des propriétés suivantes:

- a) Tout  $G$ -module simple est isomorphe au  $G$ -module trival  $K$ .
- b)  $G$  est limite projective de groupes algébriques linéaires unipotents.
- c) Si  $E \in \text{Com}_C^f$ ,  $K_1 \in \text{Alg}_K$ , et  $u \in G_E(K_1)$ , l'élément  $u$  est unipotent.

4) On suppose  $K$  de caractéristique zéro. Montrer que la catégorie des  $G$ -modules semi-simples vérifie les conditions du corollaire à la prop. 3, donc correspond à un quotient  $H$  de  $G$ . Montrer que l'on peut caractériser  $H$  comme le plus grand quotient de  $G$  qui soit *réductif* (i.e. limite projective de groupes algébriques linéaires réductifs, au sens usuel).

#### § 4

1) On prend  $K = \mathbf{C}$ . Le groupe additif  $\Gamma = \mathbf{C}$  est considéré comme un groupe de Lie complexe. Soit  $G$  son enveloppe, et soit  $C$  la bigèbre correspondante.

a) Montrer qu'une fonction  $f(z)$  sur  $\Gamma$  appartient à  $C$  si et seulement si c'est une *exponentielle-polynôme*, i.e. si elle est combinaison linéaire de fonctions de la forme  $z^n e^{\lambda z}$ , avec  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\lambda \in \mathbf{C}$ .

b) Montrer que  $C$  est produit tensoriel de la bigèbre formée des polynômes, et de la bigèbre formée des combinaisons linéaires d'exponentielles. Interpréter cette décomposition comme une décomposition de l'enveloppe  $G$  en produit du groupe *additif*  $\mathbf{G}_a$  et d'un *groupe de type multiplicatif*  $M$  dual du groupe abélien  $\mathbf{C}$ . En particulier,  $G$  n'est pas algébrique.

2) Comment faut-il modifier l'exercice précédent lorsque  $K = \mathbf{R}$  et  $\Gamma = \mathbf{R}$ ? (La partie «tore» de  $G$  n'est plus déployée; son dual est  $\mathbf{C}$ , muni de la conjugaison complexe.)

(Dans les deux exercices ci-après, on se permet d'identifier un groupe profini  $\Gamma$  à son enveloppe relativement à la catégorie des  $\Gamma$ -modules à noyau

ouvert. Cela revient à identifier un groupe fini au groupe algébrique «constant» de dimension 0 qui lui est associé.)

3) Soit  $K = \mathbf{Q}_p$ , et soit  $H$  un groupe algébrique semi-simple simplement connexe sur  $K$ . Soit  $\Gamma$  un sous-groupe ouvert compact du groupe  $H(\mathbf{Q}_p)$ . Montrer que l'enveloppe du groupe topologique  $\Gamma$  est  $H \times \Gamma$ . (Le second facteur est identifié au schéma en groupes correspondant, cf. ci-dessus.)

4) Soient  $K = \mathbf{Q}$  et  $\Gamma = \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ ,  $n \geq 3$ . On prend pour  $L$  la catégorie de toutes les représentations linéaires de  $\Gamma$  sur  $\mathbf{Q}$  de rang fini. Montrer que l'enveloppe de  $\Gamma$  est  $\mathrm{SL}_n \times \prod_p \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}_p)$ , le second facteur étant identifié à un schéma en groupes comme on l'a expliqué ci-dessus. (Utiliser le th. 16.2, p. 497, des *Publ. IHES*, 1967, combiné avec le fait que tout sous-groupe d'indice fini de  $\Gamma$  contient un «groupe de congruence».)

5) Soit  $K$  un corps complet pour une valuation discrète  $v$ . On note  $A$  (resp.  $\mathfrak{m}$ ) l'anneau (resp. l'idéal maximal) de  $v$ , et l'on note  $p$  la caractéristique du corps  $A/\mathfrak{m}$ . On suppose  $p \neq 0$  et  $\mathrm{car}(K) = 0$ .

a) Soit  $x \in K^*$ . Supposons qu'il existe un entier  $d$  tel que, pour tout  $n \geq 0$ , il existe une extension  $K_n$  de  $K$  de degré  $d$  et un élément  $y \in K_n$  tel que  $y^{p^n} = x$ . Montrer que  $v(x) = 0$ . Montrer que, si  $x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$ , on a  $x = 1$ . (Se ramener au cas où toutes les racines  $p^n$ -èmes de  $x$  appartiennent au corps  $K$ .)

b) Soit  $f : K \rightarrow \mathrm{GL}_n(K)$  un homomorphisme  $K$ -analytique. Montrer que  $f$  est «algébrique», i.e. qu'il existe une matrice nilpotente  $u$  telle que  $f(t) = \exp(tu)$  pour tout  $t \in K$ . (Appliquer a) aux valeurs propres de  $f(t)$ , avec  $d = n$ ; en conclure que  $f(t)$  est unipotent pour tout  $t$ .)

c) Déduire de b) que l'enveloppe du groupe de Lie  $K$  est le groupe additif  $\mathbf{G}_a$  (relativement à  $K$ ).

d) Etendre b) et c) aux groupes algébriques *unipotents* sur  $K$  (écrire les éléments de ces groupes comme produits de groupes à un paramètre). Même chose pour les groupes *semi-simples déployés*. [Il est probable que le résultat reste vrai pour les groupes semi-simples n'ayant aucun facteur simple anisotrope.]

e) Montrer que les résultats de b) et c) *ne s'étendent pas* aux groupes de type multiplicatif.

6) Soit  $K$  un corps localement compact ultramétrique de caractéristique 0 et soit  $\mu$  le groupe des racines de l'unité contenues dans  $K$ . Soit  $S$

le revêtement de  $\mathbf{SL}_2(K)$  défini par C. Moore et T. Kubota; on a une suite exacte

$$\{1\} \rightarrow \mu \rightarrow S \rightarrow \mathbf{SL}_2(K) \rightarrow \{1\}$$

et  $S$  est son propre groupe dérivé. Montrer que toute représentation  $K$ -linéaire analytique du groupe de Lie  $S$  est triviale sur  $\mu$ ; en déduire que  $\mathbf{SL}_2$  est l'enveloppe de  $S$ . (Si  $G$  est l'enveloppe de  $S$ , remarquer que la suite

$$\mu \rightarrow G \rightarrow \mathbf{SL}_2 \rightarrow \{1\}$$

est exacte (cf. exercice 5). Utiliser ensuite le fait que  $\mathbf{SL}_2$  est simplement connexe.)

### § 5

1) Etendre la prop. 1 au cas d'un groupe compact  $K$  opérant continûment sur un espace vectoriel réel  $V$  de dimension finie, chacune des opérations de  $K$  étant *polynomiale*. (On montrera d'abord, au moyen du théorème de Baire, que le degré de ces opérations est borné.)

2) Soit  $H$  un sous-groupe algébrique réel de  $\mathbf{GL}_n$ . Montrer que  $H$  est anisotrope si et seulement si il existe une forme quadratique positive non dégénérée sur  $\mathbf{R}^n$  qui est invariante par  $H$ .

3) a) Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire réel, et soit  $H$  un sous-groupe algébrique distingué de  $G$ . On suppose que  $H$  et  $G/H$  sont anisotropes, et que  $G/H$  est connexe. Montrer que  $G$  est anisotrope.

b) On prend pour  $G$  le groupe des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  avec  $(a^2 + b^2)^2 = 1$  et pour  $H$  le sous-groupe de celles pour lesquelles  $a^2 + b^2 = 1$ . Le groupe  $G/H$  s'identifie au groupe «constant»  $\{\pm 1\}$ . Montrer que  $H$  et  $G/H$  sont anisotropes et que  $G$  ne l'est pas.

4) Avec les notations de la prop. 7, montrer que l'injection de  $V(\mathbf{R})$  dans  $V(\mathbf{C})$  est une «équivalence d'homotopie». (Il suffit de voir que  $\pi_i(V(\mathbf{R})) \rightarrow \pi_i(V(\mathbf{C}))$  est un isomorphisme pour tout  $i$ ; utiliser le lemme des cinq pour se ramener à l'énoncé analogue pour  $G$  et  $H$ .) [Exercice: donner explicitement une «rétraction de déformation» de  $V(\mathbf{C})$  sur  $V(\mathbf{R})$ .]

En particulier, la quadrique complexe d'équation  $\sum z_i^2 = 1$  a même type d'homotopie que l'ensemble de ses points réels; énoncer des résultats analogues pour les variétés de Stiefel, etc.

5) (Cet exercice pourrait remonter au chapitre III du livre de Lie.)

Soit  $A$  un groupe de Lie complexe, commutatif, connexe, d'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$ ; soit  $\Lambda$  le noyau de  $\exp: \mathfrak{a} \rightarrow A$ , de sorte que  $A$  s'identifie à  $\mathfrak{a}/\Lambda$ .

a) Démontrer l'équivalence de:

- a<sub>1</sub>) L'application canonique  $\mathbf{C} \otimes \Lambda \rightarrow \mathfrak{a}$  est injective.
- a<sub>2</sub>)  $A$  est isomorphe à un sous-groupe de Lie d'un  $(\mathbf{C}^*)^n$ .
- a<sub>3</sub>)  $A$  est isomorphe à un groupe  $(\mathbf{C}^*)^p \times \mathbf{C}^q$ .
- a<sub>4</sub>)  $A$  possède une représentation linéaire complexe fidèle.
- a<sub>5</sub>)  $A$  possède une représentation linéaire complexe fidèle semi-simple d'image fermée.

b) Démontrer l'équivalence de:

- b<sub>1</sub>) L'application  $\mathbf{C} \otimes \Lambda \rightarrow \mathfrak{a}$  est surjective.
- b<sub>2</sub>)  $A$  est isomorphe à un quotient d'un groupe  $(\mathbf{C}^*)^n$ .
- b<sub>3</sub>) Aucun facteur direct de  $A$  n'est isomorphe à  $\mathbf{C}$ .
- b<sub>4</sub>) Toute représentation linéaire complexe de  $A$  est semi-simple.

c) Démontrer l'équivalence de:

- c<sub>1</sub>) L'application  $\mathbf{C} \otimes \Lambda \rightarrow \mathfrak{a}$  est bijective.
- c<sub>2</sub>)  $A$  est isomorphe à un  $(\mathbf{C}^*)^n$ .

d) Soit  $F$  un sous-groupe fini de  $A$ , et soit  $A' = A/F$ . Montrer que  $A$  vérifie les conditions a<sub>i</sub>) (resp. b<sub>i</sub>), c<sub>i</sub>)) si et seulement si  $A'$  les vérifie.