Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÈBRES

Autor: Serre, Jean-Pierre

Kapitel: 5.5. Groupes de Lie complexes réductifs

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60413

5.5. Groupes de Lie complexes réductifs

Théorème 5. *Soient* H *un groupe de Lie complexe,* H^o *sa composante neutre et* $\mathfrak{h}$ *son algèbre de Lie. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) H/H^o *est fini;* $\mathfrak{h}$ *est réductive; la composante neutre du centre de* H^o *est isomorphe à un produit de groupes* $\mathbf{C}^*$.

(ii) H/H^o *est fini; toute représentation linéaire complexe de* H *est semi-simple; il existe une telle représentation qui est fidèle.*

(iii) H/H^o *est fini; si* K *est un sous-groupe compact maximal de* H, *et* $\mathfrak{k}$ *son algèbre de Lie, on a* $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$.

(iv) *Il existe un groupe de Lie compact* K *tel que* H *soit isomorphe au complexifié de* K.

(v) *Il existe un groupe algébrique linéaire sur* $\mathbf{C}$ *qui est réductif, et dont le groupe des points est isomorphe à* H (comme groupe de Lie complexe).

Démonstration. L'équivalence (iv) $\Leftrightarrow$ (v) résulte des ths. 3 et 4. Le fait que (iv) $\Rightarrow$ (iii) résulte de la décomposition de Cartan de H. Inversement, supposons (iii) vérifiée, soit G l'enveloppe de K, et soit $G(\mathbf{C})$ le complexifié de K. L'injection $K \to H$ se prolonge en un morphisme $f: G(\mathbf{C}) \to H$ de groupes de Lie complexes. Vu que $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$, f est un isomorphisme local. De plus, K est un sous-groupe compact maximal à la fois de $G(\mathbf{C})$ et de H et la restriction de f à K est l'identité (modulo les identifications faites). Cela entraîne que f est un isomorphisme, en vertu du lemme suivant:

Lemme 4. *Soit* $f: A \to B$ *un homomorphisme de groupes de Lie réels. On suppose:*

a) *que* f *est un isomorphisme local;*

b) *que* A *et* B *ont un nombre fini de composantes connexes;*

c) *qu'il existe un sous-groupe compact maximal* K_A (resp. K_B) *de* A (resp. de B) *tel que la restriction de* f *à* K_A *soit un isomorphisme de* K_A *sur* K_B.

Alors f *est un isomorphisme.*

Démonstration du lemme 4. On sait que B possède une *décomposition multiexponentielle* $B = K_B . \exp(\mathfrak{p}_1) \dots \exp(\mathfrak{p}_n)$, où les $\mathfrak{p}_i$ sont des sous-espaces vectoriels de l'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ de B. Cela permet de définir une *section* $h: B \to A$ par

$$k . \exp(t_1) \dots \exp(t_n) \mapsto k' . \exp(t'_1) \dots \exp(t'_n)$$

où k' désigne l'image réciproque de k dans K_A et $t'_1, \ldots, t'_n$ les éléments de l'algèbre de Lie de A relevant $t_1, \ldots, t_n$. L'image de h est une réunion de composantes connexes de A; comme elle contient K_A, c'est A tout entier; d'où le lemme.

On a donc prouvé l'équivalence (iii) $\Leftrightarrow$ (iv).

L'implication (v) $\Rightarrow$ (i) est immédiate: on sait en effet que tout groupe réductif connexe est extension d'un groupe semi-simple par un groupe de type multiplicatif. Inversement, montrons que (i) $\Rightarrow$ (iii) (ce qui prouvera que (i) est équivalent à (iii), (iv), (v)). On peut supposer H connexe. Si Z désigne la composante neutre du centre de H, et S son groupe dérivé, $S \cap Z$ est un groupe discret, qui est le centre de S. Or on a:

LEMME 5. *Le centre d'un groupe de Lie complexe, connexe, d'algèbre de Lie semi-simple, est fini.*

Il suffit de voir que le groupe fondamental du groupe adjoint est fini. Or le groupe adjoint admet une décomposition de Cartan $K.P$, avec K compact semi-simple connexe (cf. rédaction numéro 517); son groupe fondamental est le même que celui de K, et ce dernier est fini d'après un théorème bien connu d'*Int.* (chap. VII, §3, prop. 5).

Ceci étant, on voit que $S \cap Z$ est fini, donc que H admet pour *revêtement fini* le produit $S \times Z$. Pour vérifier que H jouit de la propriété (iii), il suffit de le faire pour son revêtement $S \times Z$, c'est-à-dire pour S et pour Z. Le cas de Z est trivial (puisqu'on l'a supposé isomorphe à $(\mathbf{C}^*)^n$); pour S, on remarque que, d'après le lemme 5, son centre est fini, et l'on est ramené au cas du *groupe adjoint*; mais ce dernier est évidemment «algébrique», i.e. vérifie (v), donc aussi (iii).

Reste à démontrer que (ii) est équivalente aux quatre autres propriétés. Tout d'abord, on a (iv) $\Rightarrow$ (ii); en effet, si H est le complexifié de K, et si E est une représentation linéaire complexe de H, les sous-espaces de E stables par K le sont aussi par H, ce qui montre que E est semi-simple; de même, le fait que K ait une représentation linéaire fidèle montre que H en possède une.

Enfin, supposons (ii) vérifiée. L'existence d'une représentation semi-simple et fidèle de H montre que $\mathfrak{h}$ est réductive (car la représentation de $\mathfrak{h}$ correspondante est aussi semi-simple et fidèle). D'autre part, H^o vérifie aussi (ii) (le seul point non évident est que toute représentation linéaire ρ de H^o soit semi-simple; cela se voit en remarquant que la représentation linéaire *induite* (au sens Frobenius!) de ρ est semi-simple). Si Z désigne la composante neutre du centre de H et S le groupe dérivé de H, on voit comme ci-dessus que $S \cap Z$

est un groupe *fini* F. On a un homomorphisme surjectif $H \to Z/F$; le groupe Z/F est donc un groupe commutatif, connexe, dont toutes les représentations linéaires sont semi-simples; de plus, Z possède une représentation linéaire fidèle. Il en résulte facilement (cf. exercice 5) que Z est isomorphe à $(\mathbf{C}^*)^n$. On a donc (ii) $\Rightarrow$ (i), ce qui achève la démonstration.

[Cette démonstration n'est en fait qu'une simple vérification: tout le travail sérieux a déjà été fait. On devrait pouvoir la présenter plus simplement.]

DÉFINITION 2. *Un groupe de Lie complexe qui vérifie les propriétés équivalentes du th. 5 est dit réductif.*

THÉORÈME 6. *Soit H un groupe de Lie complexe réductif. Soit G son enveloppe complexe* (en tant que groupe de Lie complexe, cf. n° 4.3). *Alors G est un groupe algébrique linéaire complexe réductif* (au sens algébrique) *et l'application canonique $H \to G(\mathbf{C})$ est un isomorphisme.*

Soit K un sous-groupe compact maximal de H; puisque H est le complexifié de K, les représentations linéaires complexes (holomorphes) de H correspondent bijectivement (par restriction) à celles de K. Il s'ensuit que le groupe G en question n'est autre que *l'enveloppe complexe* $G_{K/\mathbf{C}}$ de K, d'où le théorème.

COROLLAIRE 1. *Soient G_1 et G_2 deux groupes algébriques linéaires complexes, et soit $f: G_1(\mathbf{C}) \to G_2(\mathbf{C})$ un homomorphisme de groupes de Lie complexes. Si G_1 est réductif, f est «algébrique»* (i.e. induit par un morphisme $G_1 \to G_2$).

Cela ne fait que traduire le th. 6.

COROLLAIRE 2. *Le foncteur «enveloppe» est une équivalence de la catégorie des groupes de Lie complexes réductifs sur celle des groupes algébriques linéaires réductifs.*

C'est clair.

Remarque. Soit K un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{C})$, où G est algébrique linéaire réductif sur $\mathbf{C}$. On peut résumer ce qui précède ainsi: l'algèbre affine de G s'identifie à l'algèbre des fonctions holomorphes sur $G(\mathbf{C})$ dont les translatées engendrent un espace vectoriel de dimension finie; par restriction à K, cette algèbre s'applique isomorphiquement sur l'algèbre des fonctions continues complexes sur K dont les translatées engendrent un espace vectoriel de dimension finie.

[On obtient ainsi des bigèbres sur **C**; à ces bigèbres correspondent des schémas en groupes; à ces schémas en groupes correspondent des groupes de Lie complexes; à ces groupes... Voyez, voyez, la machine tourner!]

EXERCICES

§ 1

1) Soit E un K-module projectif de type fini. On identifie $\mathrm{End}(E)$ à $E \otimes E'$; on note I l'élément de $E \otimes E'$ correspondant à 1_E, et ${}^tI$ son image dans $E' \otimes E$.

On munit $E \otimes E' = \mathrm{End}(E)$ de la structure de cogèbre *opposée* à celle définie au n° 1.1.

a) Si $x = a \otimes a' \in E \otimes E'$, montrer que $d(x) = a \otimes {}^tI \otimes a'$.

b) On définit une application $d_E : E \to \mathrm{End}(E) \otimes E = E \otimes E' \otimes E$ par $a \mapsto a \otimes {}^tI$. Montrer que cette application définit sur E une structure de comodule à gauche sur $\mathrm{End}(E)$.

c) On identifie $\mathrm{End}(E) \otimes \mathrm{End}(E)$ à $\mathrm{End}(E \otimes E)$ par l'application $(u, v) \mapsto u \otimes v$. D'autre part, si on écrit $\mathrm{End}(E \otimes E)$ sous la forme $E \otimes E \otimes E' \otimes E'$ la permutation des deux facteurs E' définit un automorphisme σ de $\mathrm{End}(E \otimes E)$. Montrer que l'on a

$$d(u) = \sigma(u \otimes 1_E) \quad \text{si} \quad u \in \mathrm{End}(E)\,.$$

d) Soit (v_i) une base de E, et soit $(E_{ij} = v'_j \otimes v_i)$ la base correspondante de $\mathrm{End}(E)$. Montrer que

$$d(E_{ij}) = \sum_k E_{ik} \otimes E_{kj}\,.$$

e) Justifier la Remarque 2 du n° 1.2.

2) Soit C une cogèbre plate, et soit E un comodule sur C.

a) Soit V un K-module tel que E soit isomorphe (comme module) à un quotient de E. Montrer qu'il existe un sous-comodule F de $C \otimes V$ tel que E soit isomorphe (comme comodule) à un quotient de F. (Utiliser le morphisme $C \otimes V \to C \otimes E$ et le fait que E est isomorphe à un sous-comodule de $C \otimes E$.) Montrer que, si K est noethérien, et E de type fini, on peut choisir F de type fini.