Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 39 (1993)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÈBRES

**Autor:** Serre, Jean-Pierre

**Kapitel:** 5.5. Groupes de Lie complexes réductifs

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-60413

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

# 5.5. GROUPES DE LIE COMPLEXES RÉDUCTIFS

Théorème 5. Soient H un groupe de Lie complexe,  $H^{\circ}$  sa composante neutre et  $\mathfrak{h}$  son algèbre de Lie. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i)  $H/H^{\circ}$  est fini;  $\mathfrak{h}$  est réductive; la composante neutre du centre de  $H^{\circ}$  est isomorphe à un produit de groupes  $\mathbb{C}^*$ .
- (ii)  $H/H^o$  est fini; toute représentation linéaire complexe de H est semi-simple; il existe une telle représentation qui est fidèle.
- (iii)  $H/H^o$  est fini; si K est un sous-groupe compact maximal de H, et  $\mathfrak{f}$  son algèbre de Lie, on a  $\mathfrak{h} = \mathfrak{f} \oplus i\mathfrak{f}$ .
- (iv) Il existe un groupe de Lie compact K tel que H soit isomorphe au complexifié de K.
- (v) Il existe un groupe algébrique linéaire sur C qui est réductif, et dont le groupe des points est isomorphe à H (comme groupe de Lie complexe).

Démonstration. L'équivalence (iv)  $\Leftrightarrow$  (v) résulte des ths. 3 et 4. Le fait que (iv)  $\Rightarrow$  (iii) résulte de la décomposition de Cartan de H. Inversement, supposons (iii) vérifiée, soit G l'enveloppe de K, et soit  $G(\mathbb{C})$  le complexifié de K. L'injection  $K \to H$  se prolonge en un morphisme  $f: G(\mathbb{C}) \to H$  de groupes de Lie complexes. Vu que  $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$ , f est un isomorphisme local. De plus, K est un sous-groupe compact maximal à la fois de  $G(\mathbb{C})$  et de H et la restriction de f à K est l'identité (modulo les identifications faites). Cela entraı̂ne que f est un isomorphisme, en vertu du lemme suivant:

LEMME 4. Soit  $f: A \to B$  un homomorphisme de groupes de Lie réels. On suppose:

- a) que f est un isomorphisme local;
- b) que A et B ont un nombre fini de composantes connexes;
- c) qu'il existe un sous-groupe compact maximal  $K_A$  (resp.  $K_B$ ) de  $K_A$  (resp. de  $K_A$ ) tel que la restriction de  $K_A$  soit un isomorphisme de  $K_A$  sur  $K_B$ .

Alors f est un isomorphisme.

Démonstration du lemme 4. On sait que B possède une décomposition multiexponentielle  $B = K_B \cdot \exp(p_1) \dots \exp(p_n)$ , où les  $p_i$  sont des sousespaces vectoriels de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{b}$  de B. Cela permet de définir une section  $h: B \to A$  par

$$k \cdot \exp(t_1) \dots \exp(t_n) \mapsto k' \cdot \exp(t'_1) \dots \exp(t'_n)$$

où k' désigne l'image réciproque de k dans  $K_A$  et  $t'_1, ..., t'_n$  les éléments de l'algèbre de Lie de A relevant  $t_1, ..., t_n$ . L'image de h est une réunion de composantes connexes de A; comme elle contient  $K_A$ , c'est A tout entier; d'où le lemme.

On a donc prouvé l'équivalence (iii) \( \phi \) (iv).

L'implication (v)  $\Rightarrow$  (i) est immédiate: on sait en effet que tout groupe réductif connexe est extension d'un groupe semi-simple par un groupe de type multiplicatif. Inversement, montrons que (i)  $\Rightarrow$  (iii) (ce qui prouvera que (i) est équivalent à (iii), (iv), (v)). On peut supposer H connexe. Si Z désigne la composante neutre du centre de H, et S son groupe dérivé,  $S \cap Z$  est un groupe discret, qui est le centre de S. Or on a:

LEMME 5. Le centre d'un groupe de Lie complexe, connexe, d'algèbre de Lie semi-simple, est fini.

Il suffit de voir que le groupe fondamental du groupe adjoint est fini. Or le groupe adjoint admet une décomposition de Cartan K.P, avec K compact semi-simple connexe (cf. rédaction numéro 517); son groupe fondamental est le même que celui de K, et ce dernier est fini d'après un théorème bien connu d'Int. (chap. VII, §3, prop. 5).

Ceci étant, on voit que  $S \cap Z$  est fini, donc que H admet pour revêtement fini le produit  $S \times Z$ . Pour vérifier que H jouit de la propriété (iii), il suffit de le faire pour son revêtement  $S \times Z$ , c'est-à-dire pour S et pour S. Le cas de S est trivial (puisqu'on l'a supposé isomorphe à  $(C^*)^n$ ); pour S, on remarque que, d'après le lemme S, son centre est fini, et l'on est ramené au cas du groupe adjoint; mais ce dernier est évidemment «algébrique», i.e. vérifie (v), donc aussi (iii).

Reste à démontrer que (ii) est équivalente aux quatre autres propriétés. Tout d'abord, on a (iv)  $\Rightarrow$  (ii); en effet, si H est le complexifié de K, et si E est une représentation linéaire complexe de H, les sous-espaces de E stables par K le sont aussi par H, ce qui montre que E est semi-simple; de même, le fait que E ait une représentation linéaire fidèle montre que E en possède une.

Enfin, supposons (ii) vérifiée. L'existence d'une représentation semi-simple et fidèle de H montre que  $\mathfrak{h}$  est réductive (car la représentation de  $\mathfrak{h}$  correspondante est aussi semi-simple et fidèle). D'autre part,  $H^o$  vérifie aussi (ii) (le seul point non évident est que toute représentation linéaire  $\rho$  de  $H^o$  soit semi-simple; cela se voit en remarquant que la représentation linéaire *induite* (au sens Frobenius!) de  $\rho$  est semi-simple). Si Z désigne la composante neutre du centre de H et S le groupe dérivé de H, on voit comme ci-dessus que  $S \cap Z$ 

est un groupe *fini* F. On a un homomorphisme surjectif  $H \to Z/F$ ; le groupe Z/F est donc un groupe commutatif, connexe, dont toutes les représentations linéaires sont semi-simples; de plus, Z possède une représentation linéaire fidèle. Il en résulte facilement (cf. exercice 5) que Z est isomorphe à  $(\mathbb{C}^*)^n$ . On a donc (ii)  $\Rightarrow$  (i), ce qui achève la démonstration.

[Cette démonstration n'est en fait qu'une simple vérification: tout le travail sérieux a déjà été fait. On devrait pouvoir la présenter plus simplement.]

DÉFINITION 2. Un groupe de Lie complexe qui vérifie les propriétés équivalentes du th. 5 est dit réductif.

THÉORÈME 6. Soit H un groupe de Lie complexe réductif. Soit G son enveloppe complexe (en tant que groupe de Lie complexe, cf.  $n^{\circ}$  4.3). Alors G est un groupe algébrique linéaire complexe réductif (au sens algébrique) et l'application canonique  $H \to G(\mathbb{C})$  est un isomorphisme.

Soit K un sous-groupe compact maximal de H; puisque H est le complexifié de K, les représentations linéaires complexes (holomorphes) de H correspondent bijectivement (par restriction) à celles de K. Il s'ensuit que le groupe G en question n'est autre que *l'enveloppe complexe*  $G_{K/C}$  de K, d'où le théorème.

COROLLAIRE 1. Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux groupes algébriques linéaires complexes, et soit  $f: G_1(\mathbb{C}) \to G_2(\mathbb{C})$  un homomorphisme de groupes de Lie complexes. Si  $G_1$  est réductif, f est «algébrique» (i.e. induit par un morphisme  $G_1 \to G_2$ ).

Cela ne fait que traduire le th. 6.

COROLLAIRE 2. Le foncteur «enveloppe» est une équivalence de la catégorie des groupes de Lie complexes réductifs sur celle des groupes algébriques linéaires réductifs.

C'est clair.

Remarque. Soit K un sous-groupe compact maximal de  $G(\mathbb{C})$ , où G est algébrique linéaire réductif sur  $\mathbb{C}$ . On peut résumer ce qui précède ainsi: l'algèbre affine de G s'identifie à l'algèbre des fonctions holomorphes sur  $G(\mathbb{C})$  dont les translatées engendrent un espace vectoriel de dimension finie; par restriction à K, cette algèbre s'applique isomorphiquement sur l'algèbre des fonctions continues complexes sur K dont les translatées engendrent un espace vectoriel de dimension finie.

[On obtient ainsi des bigèbres sur C; à ces bigèbres correspondent des schémas en groupes; à ces schémas en groupes correspondent des groupes de Lie complexes; à ces groupes... Voyez, voyez, la machine tourner!]

## **EXERCICES**

§ 1

1) Soit E un K-module projectif de type fini. On identifie  $\operatorname{End}(E)$  à  $E \otimes E'$ ; on note I l'élément de  $E \otimes E'$  correspondant à  $1_E$ , et  ${}^tI$  son image dans  $E' \otimes E$ .

On munit  $E \otimes E' = \operatorname{End}(E)$  de la structure de cogèbre *opposée* à celle définie au n° 1.1.

- a) Si  $x = a \otimes a' \in E \otimes E'$ , montrer que  $d(x) = a \otimes {}^{t}I \otimes a'$ .
- b) On définit une application  $d_E: E \to \operatorname{End}(E) \otimes E = E \otimes E' \otimes E$  par  $a \mapsto a \otimes {}^t I$ . Montrer que cette application définit sur E une structure de comodule à gauche sur  $\operatorname{End}(E)$ .
- c) On identifie  $\operatorname{End}(E) \otimes \operatorname{End}(E)$  à  $\operatorname{End}(E \otimes E)$  par l'application  $(u,v) \mapsto u \otimes v$ . D'autre part, si on écrit  $\operatorname{End}(E \otimes E)$  sous la forme  $E \otimes E \otimes E' \otimes E'$  la permutation des deux facteurs E' définit un automorphisme  $\sigma$  de  $\operatorname{End}(E \otimes E)$ . Montrer que l'on a

$$d(u) = \sigma(u \otimes 1_E)$$
 si  $u \in \text{End}(E)$ .

d) Soit  $(v_i)$  une base de E, et soit  $(E_{ij} = v'_j \otimes v_i)$  la base correspondante de End(E). Montrer que

$$d(E_{ij}) = \sum_{k} E_{ik} \otimes E_{kj}.$$

- e) Justifier la Remarque 2 du n° 1.2.
- 2) Soit C une cogèbre plate, et soit E un comodule sur C.
- a) Soit V un K-module tel que E soit isomorphe (comme module) à un quotient de E. Montrer qu'il existe un sous-comodule F de  $C \otimes V$  tel que E soit isomorphe (comme comodule) à un quotient de F. (Utiliser le morphisme  $C \otimes V \to C \otimes E$  et le fait que E est isomorphe à un sous-comodule de  $C \otimes E$ .) Montrer que, si K est noethérien, et E de type fini, on peut choisir F de type fini.