

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 39 (1993)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** GÈBRES  
**Autor:** Serre, Jean-Pierre  
**Kapitel:** 5.4. Retour aux groupes anisotropes  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-60413>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

*Remarque.* Le th. 4 équivaut à dire que l'*enveloppe* de  $K$  est une «forme réelle» anisotrope de  $H$ . Il y a donc correspondance bijective entre:

- sous-groupes compacts maximaux de  $H(\mathbf{C})$ ,
- formes réelles anisotropes de  $H$ .

En particulier, ces dernières sont *conjuguées entre elles* par les éléments de  $H(\mathbf{C})$  (et même par ceux de  $H^o(\mathbf{C})$ ,  $H^o$  désignant la composante neutre de  $H$ ).

#### 5.4. RETOUR AUX GROUPES ANISOTROPES

**PROPOSITION 7.** *Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire réel anisotrope, et soit  $H$  un sous-groupe algébrique de  $G$ . Soit  $V = G/H$  l'espace homogène correspondant (au sens algébrique). Alors:*

- a)  *$H$  est anisotrope.*
- b) *L'application canonique  $G(\mathbf{R}) \rightarrow V(\mathbf{R})$  est surjective* (de sorte qu'on peut identifier  $V(\mathbf{R})$  à  $G(\mathbf{R})/H(\mathbf{R})$ ).
- c) *Si  $H$  est distingué, le groupe quotient  $G/H$  est anisotrope.*

La conjugaison de Cartan  $g \mapsto \bar{g}$  du th. 2 laisse évidemment stable le sous-groupe  $H(\mathbf{C})$  de  $G(\mathbf{C})$ . Comme  $H(\mathbf{C})$  est «de type algébrique», on en conclut que  $H(\mathbf{C})$  admet lui-même une décomposition de Cartan  $K.P$ , où  $K = H(\mathbf{C}) \cap G(\mathbf{R}) = H(\mathbf{R})$ . Mais alors il est clair que l'adhérence de  $K$  pour la topologie de Zariski de  $H$  est  $H$  tout entier. Cela montre que  $H$  est anisotrope, d'où a).

Soit maintenant  $v \in V(\mathbf{R})$ ; soit  $g \in G(\mathbf{C})$  un élément dont l'image dans  $V(\mathbf{C}) = G(\mathbf{C})/H(\mathbf{C})$  est  $v$ . On a  $g \equiv \bar{g} \pmod{H(\mathbf{C})}$ . Soit  $K_1.P_1$  la décomposition de Cartan de  $G(\mathbf{C})$  utilisée plus haut, et écrivons  $g$  sous la forme  $g = k_1 p_1$ , avec  $k_1 \in K_1$ ,  $p_1 \in P_1$ . L'hypothèse  $g \equiv \bar{g} \pmod{H(\mathbf{C})}$  signifie qu'il existe  $k \in K$  et  $p \in P$  tels que  $g = \bar{g} kp$ , i.e.  $k_1 p_1 = k_1 p_1^{-1} kp$ , d'où  $p_1^2 = kp$ , ce qui entraîne  $k = 1$ ,  $p = p_1^2$ . Comme  $P$  est stable par extraction de racines carrées, on a  $p_1 \in P$ . On en conclut que  $g \equiv k_1 \pmod{H(\mathbf{C})}$ , donc que  $v$  est l'image de l'élément  $k_1 \in G(\mathbf{R})$ , ce qui prouve b).

Enfin, si  $H$  est distingué, il est clair que l'image de  $K_1$  dans  $(G/H)(\mathbf{R})$  est dense pour la topologie de Zariski de  $G/H$ ; or cette image est un compact, d'où etc.

[Le rédacteur ne voit pas comment démontrer que  $H$  est anisotrope sans utiliser les décompositions de Cartan — sauf, bien sûr, dans le cas où  $H$  est connexe, qui est trivial.]