Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÈBRES

Autor: Serre, Jean-Pierre

Kapitel: 5.3. L'ENVELOPPE COMPLEXE D'UN GROUPE COMPACT

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60413

5.3. L'ENVELOPPE COMPLEXE D'UN GROUPE COMPACT

Soit K un groupe compact. Soit $L_{\mathbf{C}}$ la catégorie des représentations linéaires *complexes* continues de rang fini de K. Cette catégorie est saturée (le corps de base étant maintenant $\mathbf{C}$). Nous noterons $G_{/\mathbf{C}}$ et $C_{/\mathbf{C}}$ le schéma en groupes et la bigèbre correspondants, et nous dirons que $G_{/\mathbf{C}}$ est *l'enveloppe complexe* de K. D'après le n° 4.3, une fonction complexe f sur K appartient à $C_{/\mathbf{C}}$ si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes:

a′) Les translatées de f engendrent un espace vectoriel de rang fini.

b′) f est continue.

En comparant avec les conditions a) et b) du n° 5.2, on voit que cela signifie que la partie réelle et la partie imaginaire de f appartiennent à la bigèbre C de G. On a donc

$$C_{/\mathbf{C}} = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} C$$

et le groupe $G_{/\mathbf{C}}$ est le *schéma en groupes déduit de* G *par extension des scalaires de* $\mathbf{R}$ *à* $\mathbf{C}$. En particulier, le groupe $G_{/\mathbf{C}}(\mathbf{C})$ de ses points complexes peut être identifié à $G(\mathbf{C})$.

Noter que la conjugaison complexe définit une *involution* $g \mapsto \bar{g}$ de $G(\mathbf{C})$, dont l'ensemble des invariants est $G(\mathbf{R}) = K$. Plus précisément:

THÉORÈME 2. *Supposons que* K *soit un groupe de Lie compact, et soit* $\mathfrak{k}$ *son algèbre de Lie. Alors* $g \mapsto \bar{g}$ *est une involution de Cartan forte* (cf. réd. n° 517) *du groupe de Lie* $G(\mathbf{C})$. *Les facteurs de la décomposition de Cartan correspondante sont* K *et* $P = \exp(i\mathfrak{k})$, *de sorte que* $G(\mathbf{C}) = K.P$.

Démonstration

a) On va d'abord vérifier le th. 2 dans le cas particulier du groupe *orthogonal* $G_1 = \mathbf{O}_n$. On a $G_1(\mathbf{R}) = \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$, $G_1(\mathbf{C}) = \mathbf{O}_n(\mathbf{C})$, et l'on sait que $g \mapsto \bar{g}$ est une décomposition de Cartan forte de $\mathbf{O}_n(\mathbf{C})$ dont l'ensemble des invariants est $K_1 = \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$. Cette décomposition montre en même temps que K_1 est dense dans $\mathbf{O}_n(\mathbf{C})$ pour la topologie de Zariski, donc que $\mathbf{O}_n$ est l'enveloppe de K_1.

b) Passons au cas général. On choisit un plongement de K dans un groupe orthogonal $K_1 = \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$; l'enveloppe G de K s'identifie alors à un sous-groupe algébrique de $\mathbf{O}_n$, à savoir l'*adhérence* de K (pour la topologie de Zariski). Le groupe $G(\mathbf{C})$ est donc un sous-groupe de $G_1(\mathbf{C})$, stable par l'involution de Cartan considérée. Comme c'est un sous-groupe «de type algébrique», il en résulte (cf. réd. 517, p. 48, prop. 3) que la restriction de $g \mapsto \bar{g}$ à ce sous-groupe est bien une décomposition de Cartan forte. On sait déjà que le sous-groupe de ses invariants est K. D'autre part, l'algèbre de Lie de $G(\mathbf{C})$ est $\mathbf{C} \otimes \mathfrak{k}$, et l'automorphisme de $\mathbf{C} \otimes \mathfrak{k}$ induit par $g \mapsto \bar{g}$ est la conjugaison complexe; on en déduit que le facteur P correspondant est bien $\exp(i\mathfrak{k})$, c.q.f.d.

Remarques

1) Lorsque K est un groupe compact quelconque, on peut l'écrire comme limite projective de groupes de Lie compacts K_α, et l'on a $G(\mathbf{C}) = \varprojlim G_\alpha(\mathbf{C})$, avec des notations évidentes. D'après le th. 2, chaque $G_\alpha(\mathbf{C})$ a une décomposition de Cartan $K_\alpha . P_\alpha$, avec $P_\alpha = \exp(i\mathfrak{k}_\alpha)$. Finalement, on obtient une décomposition de $G(\mathbf{C})$ sous la forme $G(\mathbf{C}) = K . \exp(i\mathfrak{k})$, en notant $\mathfrak{k}$ la limite projective des $\mathfrak{k}_\alpha$.

[Cette décomposition ne semble présenter aucun intérêt en dehors du cas où K est un groupe de Lie. Noter que $G(\mathbf{C})$ n'est même pas localement compact, si $\dim(K) = \infty$.]

2) A la place du groupe $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$, on aurait pu utiliser le groupe unitaire $\mathbf{U}_n(\mathbf{C})$, plus traditionnel. Toutefois, il aurait fallu expliquer comment on considère $\mathbf{U}_n$ comme un groupe algébrique sur $\mathbf{R}$, et pourquoi $\mathbf{U}_{n/\mathbf{C}}$ s'identifie à $\mathbf{GL}_{n/\mathbf{C}}$.

THÉORÈME 3. *Les hypothèses étant celles du th. 2, soit X un groupe de Lie complexe, et soit f un homomorphisme continu de K dans X. Il existe alors un homomorphisme $F: G(\mathbf{C}) \to X$ de groupes de Lie complexes, et un seul, qui prolonge f.*

Soit $K_\mathbf{C}$ le groupe de Lie *complexifié* de K, au sens de la rédaction 515, §6, n° 10 [il faut modifier la rédaction en question, car elle suppose, bien inutilement, que le groupe de Lie réel dont on part est *connexe*]. On a un homomorphisme canonique $\pi: K_C \to G(\mathbf{C})$, et le th. 3 équivaut à dire que π est un *isomorphisme.*

Il est clair en tout cas que π est surjectif; d'autre part, on sait *(loc. cit.)* que l'algèbre de Lie de $K_\mathbf{C}$ est engendrée sur $\mathbf{C}$ par $\mathfrak{k}$; puisque celle de $G(\mathbf{C})$ est $\mathfrak{k} \otimes \mathbf{C}$, on en conclut que π est un revêtement. Ce revêtement admet une section canonique $G(\mathbf{C}) = K.P \to K_\mathbf{C}$ définie par $x.\exp(it) \mapsto x'.\exp(it')$ où x désigne un élément de K, x' son image par $K \to K_\mathbf{C}$, t désigne un élément de $i\mathfrak{k}$ et t' son image par l'application tangente à $K \to K_\mathbf{C}$. L'image de cette section est $K'.P'$, avec des notations évidentes; c'est une réunion de composantes connexes de $K_\mathbf{C}$. De plus, c'est un *sous-groupe* en vertu du lemme suivant:

LEMME 3. *Soit A un groupe topologique, soit B un sous-groupe de A, et soit C la réunion des composantes connexes de A qui rencontrent B. Alors C est un sous-groupe de A.*

Si $x, y \in C$, il existe des parties connexes X, Y de A qui rencontrent B et sont telles que $x \in X, y \in Y$. Alors $X.Y^{-1}$ est une partie connexe de A rencontrant B et contenant xy^{-1}; on a donc $xy^{-1} \in C$, ce qui prouve bien que C est un sous-groupe.

Le théorème 3 est maintenant évident. En effet, on vient de voir que $K'.P'$ est un sous-groupe ouvert de $K_{\mathbf{C}}$; comme il contient K', il est nécessairement égal à $K_{\mathbf{C}}$ et la projection π est bien un isomorphisme.

Exemple. Prenons pour K le cercle $\mathbf{S}_1$, de sorte que $G(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^*$. Soit H un groupe de Lie complexe compact connexe de dimension 1 [d'aucuns appellent ça une *courbe elliptique*]; en tant que groupe de Lie réel, H est un tore de dimension 2. Choisissons un plongement f de $\mathbf{S}_1$ dans H. D'après le th. 3, f se prolonge en un *homomorphisme* $F: \mathbf{C}^* \to H$. Il est immédiat que F est un *revêtement,* et que son noyau est formé des puissances d'un élément $q \in \mathbf{C}^*$, avec $|q| < 1$; on peut donc identifier H à $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ [Tate devrait être content].

Si K est un groupe de Lie compact, il est clair que son enveloppe G est un *groupe réductif* (puisque toutes ses représentations linéaires sont semi-simples), donc $G_{/\mathbf{C}}$ est un groupe réductif complexe. Inversement:

THÉORÈME 4. *Soit H un groupe algébrique linéaire complexe réductif, et soit K un sous-groupe compact maximal de $H(\mathbf{C})$. L'enveloppe complexe de K s'identifie à H.*

Soit $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H, et soit $\mathfrak{k}$ celle de K. *On va d'abord prouver que* $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$, et qu'il existe une *décomposition de Cartan* de $H(\mathbf{C})$ dont les facteurs sont K et $\exp(i\mathfrak{k})$.

Il suffit de le faire lorsque H est connexe, puis (quitte à passer à un revêtement) lorsque H est, soit un tore, soit un groupe semi-simple. Le premier cas est trivial. Le second a été traité dans la rédaction 517, § 3 (en se ramenant au cas adjoint et en utilisant l'existence d'une forme réelle de $\mathfrak{h}$ dont la forme de Killing est négative).

Ceci étant, si G est l'enveloppe complexe de K, il est clair que le morphisme canonique $G \to H$ donne lieu à un homomorphisme $G(\mathbf{C}) \to H(\mathbf{C})$ qui est un *isomorphisme.* C'est donc un isomorphisme.

Remarque. Le th. 4 équivaut à dire que l'*enveloppe* de K est une «forme réelle» anisotrope de H. Il y a donc correspondance bijective entre:

— sous-groupes compacts maximaux de $H(\mathbf{C})$,

— formes réelles anisotropes de H.

En particulier, ces dernières sont *conjuguées entre elles* par les éléments de $H(\mathbf{C})$ (et même par ceux de $H^o(\mathbf{C})$, H^o désignant la composante neutre de H).

5.4. Retour aux groupes anisotropes

Proposition 7. *Soit G un groupe algébrique linéaire réel anisotrope, et soit H un sous-groupe algébrique de G. Soit $V = G/H$ l'espace homogène correspondant* (au sens algébrique). *Alors:*

a) *H est anisotrope.*

b) *L'application canonique $G(\mathbf{R}) \to V(\mathbf{R})$ est surjective* (de sorte qu'on peut identifier $V(\mathbf{R})$ à $G(\mathbf{R})/H(\mathbf{R})$).

c) *Si H est distingué, le groupe quotient G/H est anisotrope.*

La conjugaison de Cartan $g \mapsto \bar{g}$ du th. 2 laisse évidemment stable le sous-groupe $H(\mathbf{C})$ de $G(\mathbf{C})$. Comme $H(\mathbf{C})$ est «de type algébrique», on en conclut que $H(\mathbf{C})$ admet lui-même une décomposition de Cartan $K.P$, où $K = H(\mathbf{C}) \cap G(\mathbf{R}) = H(\mathbf{R})$. Mais alors il est clair que l'adhérence de K pour la topologie de Zariski de H est H tout entier. Cela montre que H est anisotrope, d'où a).

Soit maintenant $v \in V(\mathbf{R})$; soit $g \in G(\mathbf{C})$ un élément dont l'image dans $V(\mathbf{C}) = G(\mathbf{C})/H(\mathbf{C})$ est v. On a $g \equiv \bar{g} \bmod H(\mathbf{C})$. Soit $K_1.P_1$ la décomposition de Cartan de $G(\mathbf{C})$ utilisée plus haut, et écrivons g sous la forme $g = k_1p_1$, avec $k_1 \in K_1$, $p_1 \in P_1$. L'hypothèse $g \equiv \bar{g} \bmod H(\mathbf{C})$ signifie qu'il existe $k \in K$ et $p \in P$ tels que $g = \bar{g}kp$, i.e. $k_1p_1 = k_1p_1^{-1}kp$, d'où $p_1^2 = kp$, ce qui entraîne $k = 1$, $p = p_1^2$. Comme P est stable par extraction de racines carrées, on a $p_1 \in P$. On en conclut que $g \equiv k_1 \bmod H(\mathbf{C})$, donc que v est l'image de l'élément $k_1 \in G(\mathbf{R})$, ce qui prouve b).

Enfin, si H est distingué, il est clair que l'image de K_1 dans $(G/H)(\mathbf{R})$ est dense pour la topologie de Zariski de G/H; or cette image est un compact, d'où etc.

[Le rédacteur ne voit pas comment démontrer que H est anisotrope sans utiliser les décompositions de Cartan — sauf, bien sûr, dans le cas où H est connexe, qui est trivial.]