

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 39 (1993)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÈBRES
Autor: Serre, Jean-Pierre
Kapitel: 5.1. Algébricité des groupes compacts
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-60413>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

b) Supposons que K soit un *corps topologique* (resp. un *corps valué complet non discret*) et que Γ soit muni d'une structure de *groupe topologique* (resp. de *groupe de Lie* sur K). On peut prendre pour L la catégorie des représentations *continues* (resp. *K -analytiques*) de rang fini. Une fonction $f \in C$ appartient à la bigèbre C_L correspondante si et seulement si elle est continue (resp. analytique): cela se vérifie sans difficulté. Le schéma G_L est appelé simplement *l'enveloppe* du groupe topologique Γ (resp. du groupe de Lie Γ). On peut le caractériser par la propriété universelle suivante: si H est un groupe algébrique linéaire, tout homomorphisme *continu* (resp. *analytique*) de Γ dans le groupe topologique (resp. de Lie) $H(K)$ se prolonge de façon unique en un morphisme de G_L dans H . Cela résulte simplement de la description de C_L donnée ci-dessus.

On notera que, même lorsque Γ est un groupe de Lie connexe de dimension finie, son enveloppe n'est pas en général un groupe algébrique (i.e. G_L ne possède en général pas de module *fidèle*, cf. exercice 1).

c) Soit k un corps complet pour une valuation discrète; on suppose k d'inégale caractéristique et de corps résiduel algébriquement clos. Soit \bar{k} une clôture algébrique de k et soit $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$. Prenons pour K le corps \mathbf{Q}_p (p étant la caractéristique résiduelle de k), et pour L la catégorie des \mathbf{Q}_p -représentations de Γ qui ont une «décomposition de Hodge» au sens de Tate (Driebergen). La catégorie L est saturée. Le groupe G_L correspondant est fort intéressant [du moins pour le rédacteur — les auditeurs du Collège, qui l'ont subi pendant trois mois, sont peut-être d'un avis différent].

§5. GROUPES COMPACTS ET GROUPES COMPLEXES

Dans ce paragraphe, le corps de base est \mathbf{R} ou \mathbf{C} .

5.1. ALGÈBRICITÉ DES GROUPES COMPACTS

PROPOSITION 1. *Soit K un groupe compact, opérant linéairement et continûment sur un espace vectoriel réel V de dimension finie. Toute orbite de K dans V est fermée pour la topologie de Zariski de V (relativement à \mathbf{R}).*

Soit $x \in V$, et soit y un point de V n'appartenant pas à l'orbite Kx de x . Il nous faut construire une fonction polynomiale P sur V qui soit nulle sur Kx et non nulle en y . L'existence d'une telle fonction résulte du lemme plus précis suivant:

LEMME 1. *Il existe une fonction polynomiale P sur V qui prend les valeurs 0 en x et 1 en y et qui est invariante par K .*

Puisque Kx et Ky sont fermés et disjoints, il existe une fonction continue réelle f sur V qui vaut 0 sur Kx et 1 sur Ky . Comme les fonctions polynomiales sont denses dans les fonctions continues (pour la topologie de la convergence compacte), il existe une fonction polynomiale F sur V qui est $\leq 1/3$ sur Kx et $\geq 2/3$ sur Ky . Soit dk la mesure de Haar de K , normalisée de telle sorte que sa masse totale soit 1. La fonction F' définie par

$$F'(v) = \int_K F(k.v) dk$$

est une fonction polynomiale invariante par K ; si a (resp. b) désigne la valeur de F' sur l'orbite Kx (resp. Ky), on a $a \leq 1/3$ et $b \geq 2/3$, d'où $a \neq b$. La fonction $P = \frac{F' - a}{b - a}$ répond alors à la question.

COROLLAIRE. *L'image de K dans $\text{Aut}(V)$ est fermée pour la topologie de Zariski de $\text{End}(V)$ [et a fortiori pour celle de $\text{Aut}(V)$].*

En effet, K opère linéairement sur $\text{End}(V)$ par

$$(k, u) \mapsto k.u \quad \text{si } k \in K, u \in \text{End}(V),$$

et K est l'orbite de $1_V \in \text{End}(V)$; on peut donc appliquer la proposition à l'espace vectoriel $\text{End}(V)$.

PROPOSITION 2. *Soit G un groupe algébrique linéaire sur \mathbf{R} , et soit K un sous-groupe compact de $G(\mathbf{R})$. Soit H le plus petit sous-groupe algébrique réel de G contenant K . On a alors*

$$K = H(\mathbf{R}).$$

En effet, on peut plonger G comme sous-groupe algébrique fermé dans un groupe linéaire \mathbf{GL}_n ; la proposition résulte alors du corollaire ci-dessus.

Remarque. Le groupe H peut aussi être défini comme l'adhérence de K dans G (pour la topologie de Zariski); il est en effet immédiat que cette adhérence est un sous-schéma en groupes de G . La bigèbre de H est le quotient de celle de G par l'idéal formé des fonctions dont la restriction à K est nulle.