Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 39 (1993)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÈBRES
Autor: Serre, Jean-Pierre
Kapitel: §5. Groupes compacts et groupes complexes
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60413

b) Supposons que K soit un *corps topologique* (resp. *un corps valué complet non discret*) et que Γ soit muni d'une structure de *groupe topologique* (resp. de *groupe de Lie* sur K). On peut prendre pour L la catégorie des représentations *continues* (resp. *K-analytiques*) de rang fini. Une fonction $f \in C$ appartient à la bigèbre C_L correspondante si et seulement si elle est continue (resp. analytique): cela se vérifie sans difficulté. Le schéma G_L est appelé simplement *l'enveloppe* du groupe topologique Γ (resp. du groupe de Lie Γ). On peut le caractériser par la propriété universelle suivante: si H est un groupe algébrique linéaire, tout homomorphisme *continu* (resp. *analytique*) de Γ dans le groupe topologique (resp. de Lie) $H(K)$ se prolonge de façon unique en un morphisme de G_L dans H. Cela résulte simplement de la description de C_L donnée ci-dessus.

On notera que, même lorsque Γ est un groupe de Lie connexe de dimension finie, son enveloppe n'est pas en général un groupe algébrique (i.e. G_L ne possède en général pas de module *fidèle*, cf. exercice 1).

c) Soit k un corps complet pour une valuation discrète; on suppose k d'inégale caractéristique et de corps résiduel algébriquement clos. Soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et soit $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Prenons pour K le corps $\mathbf{Q}_p$ (p étant la caractéristique résiduelle de k), et pour L la catégorie des $\mathbf{Q}_p$-représentations de Γ qui ont une «décomposition de Hodge» au sens de Tate (Driebergen). La catégorie L est saturée. Le groupe G_L correspondant est fort intéressant [du moins pour le rédacteur — les auditeurs du Collège, qui l'ont subi pendant trois mois, sont peut-être d'un avis différent].

§5. Groupes compacts et groupes complexes

Dans ce paragraphe, le corps de base est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

5.1. Algébricité des groupes compacts

PROPOSITION 1. *Soit K un groupe compact, opérant linéairement et continûment sur un espace vectoriel réel V de dimension finie. Toute orbite de K dans V est fermée pour la topologie de Zariski de V* (relativement à $\mathbf{R}$).

Soit $x \in V$, et soit y un point de V n'appartenant pas à l'orbite Kx de x. Il nous faut construire une fonction polynomiale P sur V qui soit nulle sur Kx et non nulle en y. L'existence d'une telle fonction résulte du lemme plus précis suivant:

LEMME 1. *Il existe une fonction polynomiale* P *sur* V *qui prend les valeurs* 0 *en* x *et* 1 *en* y *et qui est invariante par* K.

Puisque Kx et Ky sont fermés et disjoints, il existe une fonction continue réelle f sur V qui vaut 0 sur Kx et 1 sur Ky. Comme les fonctions polynomiales sont denses dans les fonctions continues (pour la topologie de la convergence compacte), il existe une fonction polynomiale F sur V qui est $\leqslant 1/3$ sur Kx et $\geqslant 2/3$ sur Ky. Soit dk la mesure de Haar de K, normalisée de telle sorte que sa masse totale soit 1. La fonction F' définie par

$$F'(v) = \int_K F(k.v)\,dk$$

est une fonction polynomiale invariante par K; si a (resp. b) désigne la valeur de F' sur l'orbite Kx (resp. Ky), on a $a \leqslant 1/3$ et $b \geqslant 2/3$, d'où $a \neq b$. La fonction $P = \dfrac{F' - a}{b - a}$ répond alors à la question.

COROLLAIRE. *L'image de* K *dans* $\mathrm{Aut}(V)$ *est fermée pour la topologie de Zariski de* $\mathrm{End}(V)$ [et *a fortiori* pour celle de $\mathrm{Aut}(V)$].

En effet, K opère linéairement sur $\mathrm{End}(V)$ par

$$(k, u) \mapsto k.u \quad \text{si} \quad k \in K, u \in \mathrm{End}(V)\ ,$$

et K est l'orbite de $1_V \in \mathrm{End}(V)$; on peut donc appliquer la proposition à l'espace vectoriel $\mathrm{End}(V)$.

PROPOSITION 2. *Soit* G *un groupe algébrique linéaire sur* $\mathbf{R}$, *et soit* K *un sous-groupe compact de* $G(\mathbf{R})$. *Soit* H *le plus petit sous-groupe algébrique réel de* G *contenant* K. *On a alors*

$$K = H(\mathbf{R})\ .$$

En effet, on peut plonger G comme sous-groupe algébrique fermé dans un groupe linéaire $\mathbf{GL}_n$; la proposition résulte alors du corollaire ci-dessus.

Remarque. Le groupe H peut aussi être défini comme l'*adhérence* de K dans G (pour la topologie de Zariski); il est en effet immédiat que cette adhérence est un sous-schéma en groupes de G. La bigèbre de H est le quotient de celle de G par l'idéal formé des fonctions dont la restriction à K est nulle.

5.2. L'ENVELOPPE D'UN GROUPE COMPACT

Soit K un groupe compact. Considérons la catégorie L des représentations linéaires continues réelles de rang fini de K. Cette catégorie est *saturée* (cf. n° 4.3). Nous noterons G le schéma en groupes correspondant (sur $\mathbf{R}$) et C sa bigèbre. On dit que G est *l'enveloppe* de K, cf. n° 4.3, exemple b). Rappelons *(loc. cit.)* qu'une fonction réelle f sur K appartient à C si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes:

a) Les translatées de f (à gauche, par exemple) engendrent un espace vectoriel réel de rang fini.

b) f est continue.

Rappelons également que l'on a défini un homomorphisme canonique

$$K \to G(\mathbf{R}) .$$

THÉORÈME 1. *L'homomorphisme* $K \to G(\mathbf{R})$ *est un isomorphisme.*

L'injectivité résulte du *théorème de Peter-Weyl,* que l'on admet.

Pour prouver la surjectivité, écrivons G comme limite projective des groupes algébriques G_E attachés aux éléments de L (cf. n° 4.3). On a évidemment

$$G(\mathbf{R}) = \varprojlim . G_E(\mathbf{R}) .$$

D'autre part, d'après la prop. 2, tous les homomorphismes

$$K \to G_E(\mathbf{R})$$

sont surjectifs. Il en est donc de même (grâce à la compacité) de $K \to \varprojlim . G_E(\mathbf{R})$, d'où le théorème.

PROPOSITION 3. *Soit* $E \in L$. *Pour que* E *soit une représentation fidèle de* K (au sens usuel, i.e. le noyau de $K \to \mathrm{Aut}(E)$ doit être réduit à $\{1\}$), *il faut et il suffit que* E *soit fidèle comme C-comodule* (cf. n° 3.5).

Si E est fidèle comme comodule, G s'identifie à G_E, donc K s'identifie à $G_E(\mathbf{R})$ et il est clair que E est fidèle comme représentation de K.

La réciproque provient de ce qui a été démontré au n° 3.5, combiné avec le lemme suivant:

LEMME 2 (Burnside). *Si* E *est fidèle, toute représentation irréductible continue de* K *est un facteur d'une représentation* $\overset{n}{\otimes} E$, *avec* $n \geqslant 0$ *convenable.*

Soit F une telle représentation, et soit χ le caractère d'une composante irréductible de $C \otimes F$. Si F n'était facteur d'aucune puissance tensorielle de E, les formules d'orthogonalité des coefficients de représentations montreraient que χ est orthogonal à tous les polynômes en les coefficients c_{ij} de la représentation E. Comme ces polynômes sont denses dans l'espace des fonctions continues sur K, on aurait $\chi = 0$, ce qui est absurde.

[Il n'est probablement pas nécessaire d'utiliser les relations d'orthogonalité. Peu importe.]

Remarque. L'analogue du lemme 2 dans le cas complexe est vrai, à condition de remplacer $\overset{n}{\otimes} E$ par $\overset{n}{\otimes} (E \oplus \check{E})$. La démonstration est essentiellement la même. [Dans le cas réel, l'existence d'une forme quadratique non dégénérée invariante montre que $\check{E}$ est isomorphe à E; c'est pour cela que l'on a pu se débarrasser de $\check{E}$.]

COROLLAIRE. *Lorsque E est fidèle, l'enveloppe de K s'identifie au groupe G_E.*

Cela ne fait que reformuler la proposition.

PROPOSITION 4. *Pour que G soit algébrique, il faut et il suffit que K soit un groupe de Lie.*

Si K est un groupe de Lie, le théorème de Peter-Weyl montre qu'il admet une représentation fidèle E; on a alors $G = G_E$ d'après le corollaire ci-dessus, et G est donc algébrique. Inversement, si G est algébrique, il est clair que $K = G(\mathbf{R})$ est un groupe de Lie.

DÉFINITION 1. *Un groupe algébrique linéaire réel H est dit anisotrope s'il vérifie les deux conditions suivantes:*

a) *$H(\mathbf{R})$ est compact.*

b) *$H(\mathbf{R})$ est dense pour la topologie de Zariski de H.*

(Comme $H(\mathbf{R})$ contient un voisinage de 1 dans H, la condition b) équivaut à la suivante:

b′) *Toute composante connexe (au sens algébrique) de H contient un point réel.*

En particulier, b) est vérifiée si H est *connexe*.)

Exemples

1) Un groupe semi-simple connexe est anisotrope si et seulement si la forme de Killing de son algèbre de Lie est négative.

2) Un groupe de type multiplicatif (non nécessairement connexe) est anisotrope si et seulement si tout homomorphisme de ce groupe dans le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ est trivial ou d'ordre 2. (La conjugaison complexe opère donc par $\chi \mapsto \chi^{-1}$ sur le groupe dual.)

PROPOSITION 5. *Soit H un groupe algébrique linéaire réel, et soit K un sous-groupe compact de $H(\mathbf{R})$ dense pour la topologie de Zariski. Alors H est anisotrope, on a $K = H(\mathbf{R})$ et H s'identifie à l'enveloppe de K.*

Le fait que H soit l'enveloppe de K résulte du corollaire à la prop. 3. On en déduit que $K = H(\mathbf{R})$, donc que H est anisotrope.

COROLLAIRE. *Soit H' un groupe algébrique linéaire réel, et soit φ un homomorphisme continu de K dans $H'(\mathbf{R})$. Il existe alors un morphisme $f: H \to H'$ et un seul qui prolonge φ.*

Cela ne fait que traduire le fait que H est l'enveloppe de K.

Remarque. Il est essentiel de supposer que H' est *linéaire* (prendre pour K un cercle, et pour H' une courbe elliptique!).

PROPOSITION 6. *Le foncteur «enveloppe» est une équivalence de la catégorie des groupes de Lie compacts sur celle des groupes algébriques linéaires réels anisotropes.*

C'est clair.

Remarques

1) Le foncteur «enveloppe» jouit des propriétés explicitées au n° 4.3. En particulier, les éléments de $G(\mathbf{R}) = K$ peuvent être interprétés comme les automorphismes du foncteur «espace vectoriel sous-jacent» commutant au produit tensoriel et triviaux pour le module trivial $\mathbf{R}$. [Ce n'est pas tout à fait le *théorème de dualité de Tannaka*, car ce dernier est relatif à des représentations complexes *unitaires*, et à des automorphismes *unitaires*. Il devrait y avoir moyen de passer de l'un à l'autre. Au concours!]

2) Si K est un groupe de Lie compact, il n'y a pas lieu de distinguer entre son enveloppe en tant que *groupe topologique*, ou en tant que *groupe de Lie réel*, puisque toute représentation linéaire continue d'un groupe de Lie réel est analytique. En particulier, les éléments de la bigèbre de K sont des *fonctions analytiques* sur K.

5.3. L'ENVELOPPE COMPLEXE D'UN GROUPE COMPACT

Soit K un groupe compact. Soit $L_{\mathbf{C}}$ la catégorie des représentations linéaires *complexes* continues de rang fini de K. Cette catégorie est saturée (le corps de base étant maintenant $\mathbf{C}$). Nous noterons $G_{/\mathbf{C}}$ et $C_{/\mathbf{C}}$ le schéma en groupes et la bigèbre correspondants, et nous dirons que $G_{/\mathbf{C}}$ est *l'enveloppe complexe* de K. D'après le n° 4.3, une fonction complexe f sur K appartient à $C_{/\mathbf{C}}$ si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes:

a′) Les translatées de f engendrent un espace vectoriel de rang fini.

b′) f est continue.

En comparant avec les conditions a) et b) du n° 5.2, on voit que cela signifie que la partie réelle et la partie imaginaire de f appartiennent à la bigèbre C de G. On a donc

$$C_{/\mathbf{C}} = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} C$$

et le groupe $G_{/\mathbf{C}}$ est le *schéma en groupes déduit de* G *par extension des scalaires de* $\mathbf{R}$ *à* $\mathbf{C}$. En particulier, le groupe $G_{/\mathbf{C}}(\mathbf{C})$ de ses points complexes peut être identifié à $G(\mathbf{C})$.

Noter que la conjugaison complexe définit une *involution* $g \mapsto \bar{g}$ de $G(\mathbf{C})$, dont l'ensemble des invariants est $G(\mathbf{R}) = K$. Plus précisément:

THÉORÈME 2. *Supposons que* K *soit un groupe de Lie compact, et soit* $\mathfrak{k}$ *son algèbre de Lie. Alors* $g \mapsto \bar{g}$ *est une involution de Cartan forte* (cf. réd. n° 517) *du groupe de Lie* $G(\mathbf{C})$. *Les facteurs de la décomposition de Cartan correspondante sont* K *et* $P = \exp(i\mathfrak{k})$, *de sorte que* $G(\mathbf{C}) = K.P$.

Démonstration

a) On va d'abord vérifier le th. 2 dans le cas particulier du groupe *orthogonal* $G_1 = \mathbf{O}_n$. On a $G_1(\mathbf{R}) = \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$, $G_1(\mathbf{C}) = \mathbf{O}_n(\mathbf{C})$, et l'on sait que $g \mapsto \bar{g}$ est une décomposition de Cartan forte de $\mathbf{O}_n(\mathbf{C})$ dont l'ensemble des invariants est $K_1 = \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$. Cette décomposition montre en même temps que K_1 est dense dans $\mathbf{O}_n(\mathbf{C})$ pour la topologie de Zariski, donc que $\mathbf{O}_n$ est l'enveloppe de K_1.

b) Passons au cas général. On choisit un plongement de K dans un groupe orthogonal $K_1 = \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$; l'enveloppe G de K s'identifie alors à un sous-groupe algébrique de $\mathbf{O}_n$, à savoir l'*adhérence* de K (pour la topologie de Zariski). Le groupe $G(\mathbf{C})$ est donc un sous-groupe de $G_1(\mathbf{C})$, stable par l'involution de Cartan considérée. Comme c'est un sous-groupe «de type algébrique», il en résulte (cf. réd. 517, p. 48, prop. 3) que la restriction de $g \mapsto \bar{g}$ à ce sous-groupe est bien une décomposition de Cartan forte. On sait déjà que le sous-groupe de ses invariants est K. D'autre part, l'algèbre de Lie de $G(\mathbf{C})$ est $\mathbf{C} \otimes \mathfrak{k}$, et l'automorphisme de $\mathbf{C} \otimes \mathfrak{k}$ induit par $g \mapsto \bar{g}$ est la conjugaison complexe; on en déduit que le facteur P correspondant est bien $\exp(i\mathfrak{k})$, c.q.f.d.

Remarques

1) Lorsque K est un groupe compact quelconque, on peut l'écrire comme limite projective de groupes de Lie compacts K_α, et l'on a $G(\mathbf{C}) = \varprojlim G_\alpha(\mathbf{C})$, avec des notations évidentes. D'après le th. 2, chaque $G_\alpha(\mathbf{C})$ a une décomposition de Cartan $K_\alpha . P_\alpha$, avec $P_\alpha = \exp(i\mathfrak{k}_\alpha)$. Finalement, on obtient une décomposition de $G(\mathbf{C})$ sous la forme $G(\mathbf{C}) = K . \exp(i\mathfrak{k})$, en notant $\mathfrak{k}$ la limite projective des $\mathfrak{k}_\alpha$.

[Cette décomposition ne semble présenter aucun intérêt en dehors du cas où K est un groupe de Lie. Noter que $G(\mathbf{C})$ n'est même pas localement compact, si $\dim(K) = \infty$.]

2) A la place du groupe $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$, on aurait pu utiliser le groupe unitaire $\mathbf{U}_n(\mathbf{C})$, plus traditionnel. Toutefois, il aurait fallu expliquer comment on considère $\mathbf{U}_n$ comme un groupe algébrique sur $\mathbf{R}$, et pourquoi $\mathbf{U}_{n/\mathbf{C}}$ s'identifie à $\mathbf{GL}_{n/\mathbf{C}}$.

THÉORÈME 3. *Les hypothèses étant celles du th. 2, soit X un groupe de Lie complexe, et soit f un homomorphisme continu de K dans X. Il existe alors un homomorphisme $F: G(\mathbf{C}) \to X$ de groupes de Lie complexes, et un seul, qui prolonge f.*

Soit $K_\mathbf{C}$ le groupe de Lie *complexifié* de K, au sens de la rédaction 515, §6, n° 10 [il faut modifier la rédaction en question, car elle suppose, bien inutilement, que le groupe de Lie réel dont on part est *connexe*]. On a un homomorphisme canonique $\pi: K_C \to G(\mathbf{C})$, et le th. 3 équivaut à dire que π est un *isomorphisme.*

Il est clair en tout cas que π est surjectif; d'autre part, on sait *(loc. cit.)* que l'algèbre de Lie de $K_\mathbf{C}$ est engendrée sur $\mathbf{C}$ par $\mathfrak{k}$; puisque celle de $G(\mathbf{C})$ est $\mathfrak{k} \otimes \mathbf{C}$, on en conclut que π est un revêtement. Ce revêtement admet une section canonique $G(\mathbf{C}) = K . P \to K_\mathbf{C}$ définie par $x . \exp(it) \mapsto x' . \exp(it')$ où x désigne un élément de K, x' son image par $K \to K_\mathbf{C}$, t désigne un élément de $i\mathfrak{k}$ et t' son image par l'application tangente à $K \to K_\mathbf{C}$. L'image de cette section est $K' . P'$, avec des notations évidentes; c'est une réunion de composantes connexes de $K_\mathbf{C}$. De plus, c'est un *sous-groupe* en vertu du lemme suivant:

LEMME 3. *Soit A un groupe topologique, soit B un sous-groupe de A, et soit C la réunion des composantes connexes de A qui rencontrent B. Alors C est un sous-groupe de A.*

Si $x, y \in C$, il existe des parties connexes X, Y de A qui rencontrent B et sont telles que $x \in X, y \in Y$. Alors $X . Y^{-1}$ est une partie connexe de A rencontrant B et contenant xy^{-1}; on a donc $xy^{-1} \in C$, ce qui prouve bien que C est un sous-groupe.

Le théorème 3 est maintenant évident. En effet, on vient de voir que $K' . P'$ est un sous-groupe ouvert de $K_{\mathbf{C}}$; comme il contient K', il est nécessairement égal à $K_{\mathbf{C}}$ et la projection π est bien un isomorphisme.

Exemple. Prenons pour K le cercle $\mathbf{S}_1$, de sorte que $G(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^*$. Soit H un groupe de Lie complexe compact connexe de dimension 1 [d'aucuns appellent ça une *courbe elliptique*]; en tant que groupe de Lie réel, H est un tore de dimension 2. Choisissons un plongement f de $\mathbf{S}_1$ dans H. D'après le th. 3, f se prolonge en un *homomorphisme* $F: \mathbf{C}^* \to H$. Il est immédiat que F est un *revêtement,* et que son noyau est formé des puissances d'un élément $q \in \mathbf{C}^*$, avec $|q| < 1$; on peut donc identifier H à $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ [Tate devrait être content].

Si K est un groupe de Lie compact, il est clair que son enveloppe G est un *groupe réductif* (puisque toutes ses représentations linéaires sont semi-simples), donc $G_{/\mathbf{C}}$ est un groupe réductif complexe. Inversement:

THÉORÈME 4. *Soit H un groupe algébrique linéaire complexe réductif, et soit K un sous-groupe compact maximal de $H(\mathbf{C})$. L'enveloppe complexe de K s'identifie à H.*

Soit $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H, et soit $\mathfrak{k}$ celle de K. *On va d'abord prouver que* $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$, et qu'il existe une *décomposition de Cartan* de $H(\mathbf{C})$ dont les facteurs sont K et $\exp(i\mathfrak{k})$.

Il suffit de le faire lorsque H est connexe, puis (quitte à passer à un revêtement) lorsque H est, soit un tore, soit un groupe semi-simple. Le premier cas est trivial. Le second a été traité dans la rédaction 517, §3 (en se ramenant au cas adjoint et en utilisant l'existence d'une forme réelle de $\mathfrak{h}$ dont la forme de Killing est négative).

Ceci étant, si G est l'enveloppe complexe de K, il est clair que le morphisme canonique $G \to H$ donne lieu à un homomorphisme $G(\mathbf{C}) \to H(\mathbf{C})$ qui est un *isomorphisme.* C'est donc un isomorphisme.

Remarque. Le th. 4 équivaut à dire que l'*enveloppe* de K est une «forme réelle» anisotrope de H. Il y a donc correspondance bijective entre:

— sous-groupes compacts maximaux de $H(\mathbf{C})$,

— formes réelles anisotropes de H.

En particulier, ces dernières sont *conjuguées entre elles* par les éléments de $H(\mathbf{C})$ (et même par ceux de $H^o(\mathbf{C})$, H^o désignant la composante neutre de H).

5.4. Retour aux groupes anisotropes

Proposition 7. *Soit G un groupe algébrique linéaire réel anisotrope, et soit H un sous-groupe algébrique de G. Soit $V = G/H$ l'espace homogène correspondant* (au sens algébrique). *Alors:*

a) *H est anisotrope.*

b) *L'application canonique $G(\mathbf{R}) \to V(\mathbf{R})$ est surjective* (de sorte qu'on peut identifier $V(\mathbf{R})$ à $G(\mathbf{R})/H(\mathbf{R})$).

c) *Si H est distingué, le groupe quotient G/H est anisotrope.*

La conjugaison de Cartan $g \mapsto \bar{g}$ du th. 2 laisse évidemment stable le sous-groupe $H(\mathbf{C})$ de $G(\mathbf{C})$. Comme $H(\mathbf{C})$ est «de type algébrique», on en conclut que $H(\mathbf{C})$ admet lui-même une décomposition de Cartan $K.P$, où $K = H(\mathbf{C}) \cap G(\mathbf{R}) = H(\mathbf{R})$. Mais alors il est clair que l'adhérence de K pour la topologie de Zariski de H est H tout entier. Cela montre que H est anisotrope, d'où a).

Soit maintenant $v \in V(\mathbf{R})$; soit $g \in G(\mathbf{C})$ un élément dont l'image dans $V(\mathbf{C}) = G(\mathbf{C})/H(\mathbf{C})$ est v. On a $g \equiv \bar{g} \bmod H(\mathbf{C})$. Soit $K_1.P_1$ la décomposition de Cartan de $G(\mathbf{C})$ utilisée plus haut, et écrivons g sous la forme $g = k_1 p_1$, avec $k_1 \in K_1$, $p_1 \in P_1$. L'hypothèse $g \equiv \bar{g} \bmod H(\mathbf{C})$ signifie qu'il existe $k \in K$ et $p \in P$ tels que $g = \bar{g}kp$, i.e. $k_1 p_1 = k_1 p_1^{-1} kp$, d'où $p_1^2 = kp$, ce qui entraîne $k = 1$, $p = p_1^2$. Comme P est stable par extraction de racines carrées, on a $p_1 \in P$. On en conclut que $g \equiv k_1 \bmod H(\mathbf{C})$, donc que v est l'image de l'élément $k_1 \in G(\mathbf{R})$, ce qui prouve b).

Enfin, si H est distingué, il est clair que l'image de K_1 dans $(G/H)(\mathbf{R})$ est dense pour la topologie de Zariski de G/H; or cette image est un compact, d'où etc.

[Le rédacteur ne voit pas comment démontrer que H est anisotrope sans utiliser les décompositions de Cartan — sauf, bien sûr, dans le cas où H est connexe, qui est trivial.]

5.5. Groupes de Lie complexes réductifs

Théorème 5. *Soient H un groupe de Lie complexe, H^o sa composante neutre et $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *H/H^o est fini; $\mathfrak{h}$ est réductive; la composante neutre du centre de H^o est isomorphe à un produit de groupes $\mathbf{C}^*$.*

(ii) *H/H^o est fini; toute représentation linéaire complexe de H est semi-simple; il existe une telle représentation qui est fidèle.*

(iii) *H/H^o est fini; si K est un sous-groupe compact maximal de H, et $\mathfrak{k}$ son algèbre de Lie, on a $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$.*

(iv) *Il existe un groupe de Lie compact K tel que H soit isomorphe au complexifié de K.*

(v) *Il existe un groupe algébrique linéaire sur $\mathbf{C}$ qui est réductif, et dont le groupe des points est isomorphe à H* (comme groupe de Lie complexe).

Démonstration. L'équivalence (iv) $\Leftrightarrow$ (v) résulte des ths. 3 et 4. Le fait que (iv) $\Rightarrow$ (iii) résulte de la décomposition de Cartan de H. Inversement, supposons (iii) vérifiée, soit G l'enveloppe de K, et soit $G(\mathbf{C})$ le complexifié de K. L'injection $K \to H$ se prolonge en un morphisme $f: G(\mathbf{C}) \to H$ de groupes de Lie complexes. Vu que $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$, f est un isomorphisme local. De plus, K est un sous-groupe compact maximal à la fois de $G(\mathbf{C})$ et de H et la restriction de f à K est l'identité (modulo les identifications faites). Cela entraîne que f est un isomorphisme, en vertu du lemme suivant:

Lemme 4. *Soit $f: A \to B$ un homomorphisme de groupes de Lie réels. On suppose:*

a) *que f est un isomorphisme local;*

b) *que A et B ont un nombre fini de composantes connexes;*

c) *qu'il existe un sous-groupe compact maximal K_A* (resp. K_B) *de A* (resp. de B) *tel que la restriction de f à K_A soit un isomorphisme de K_A sur K_B.*

Alors f est un isomorphisme.

Démonstration du lemme 4. On sait que B possède une *décomposition multiexponentielle* $B = K_B . \exp(\mathfrak{p}_1) \dots \exp(\mathfrak{p}_n)$, où les $\mathfrak{p}_i$ sont des sous-espaces vectoriels de l'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ de B. Cela permet de définir une *section* $h: B \to A$ par

$$k . \exp(t_1) \dots \exp(t_n) \mapsto k' . \exp(t'_1) \dots \exp(t'_n)$$

où k' désigne l'image réciproque de k dans K_A et $t'_1, \ldots, t'_n$ les éléments de l'algèbre de Lie de A relevant $t_1, \ldots, t_n$. L'image de h est une réunion de composantes connexes de A; comme elle contient K_A, c'est A tout entier; d'où le lemme.

On a donc prouvé l'équivalence (iii) $\Leftrightarrow$ (iv).

L'implication (v) $\Rightarrow$ (i) est immédiate: on sait en effet que tout groupe réductif connexe est extension d'un groupe semi-simple par un groupe de type multiplicatif. Inversement, montrons que (i) $\Rightarrow$ (iii) (ce qui prouvera que (i) est équivalent à (iii), (iv), (v)). On peut supposer H connexe. Si Z désigne la composante neutre du centre de H, et S son groupe dérivé, $S \cap Z$ est un groupe discret, qui est le centre de S. Or on a:

LEMME 5. *Le centre d'un groupe de Lie complexe, connexe, d'algèbre de Lie semi-simple, est fini.*

Il suffit de voir que le groupe fondamental du groupe adjoint est fini. Or le groupe adjoint admet une décomposition de Cartan $K.P$, avec K compact semi-simple connexe (cf. rédaction numéro 517); son groupe fondamental est le même que celui de K, et ce dernier est fini d'après un théorème bien connu d'*Int.* (chap. VII, §3, prop. 5).

Ceci étant, on voit que $S \cap Z$ est fini, donc que H admet pour *revêtement fini* le produit $S \times Z$. Pour vérifier que H jouit de la propriété (iii), il suffit de le faire pour son revêtement $S \times Z$, c'est-à-dire pour S et pour Z. Le cas de Z est trivial (puisqu'on l'a supposé isomorphe à $(\mathbf{C}^*)^n$); pour S, on remarque que, d'après le lemme 5, son centre est fini, et l'on est ramené au cas du *groupe adjoint*; mais ce dernier est évidemment «algébrique», i.e. vérifie (v), donc aussi (iii).

Reste à démontrer que (ii) est équivalente aux quatre autres propriétés. Tout d'abord, on a (iv) $\Rightarrow$ (ii); en effet, si H est le complexifié de K, et si E est une représentation linéaire complexe de H, les sous-espaces de E stables par K le sont aussi par H, ce qui montre que E est semi-simple; de même, le fait que K ait une représentation linéaire fidèle montre que H en possède une.

Enfin, supposons (ii) vérifiée. L'existence d'une représentation semi-simple et fidèle de H montre que $\mathfrak{h}$ est réductive (car la représentation de $\mathfrak{h}$ correspondante est aussi semi-simple et fidèle). D'autre part, H^o vérifie aussi (ii) (le seul point non évident est que toute représentation linéaire ρ de H^o soit semi-simple; cela se voit en remarquant que la représentation linéaire *induite* (au sens Frobenius!) de ρ est semi-simple). Si Z désigne la composante neutre du centre de H et S le groupe dérivé de H, on voit comme ci-dessus que $S \cap Z$

est un groupe *fini* F. On a un homomorphisme surjectif $H \to Z/F$; le groupe Z/F est donc un groupe commutatif, connexe, dont toutes les représentations linéaires sont semi-simples; de plus, Z possède une représentation linéaire fidèle. Il en résulte facilement (cf. exercice 5) que Z est isomorphe à $(\mathbf{C}^*)^n$. On a donc (ii) $\Rightarrow$ (i), ce qui achève la démonstration.

[Cette démonstration n'est en fait qu'une simple vérification: tout le travail sérieux a déjà été fait. On devrait pouvoir la présenter plus simplement.]

DÉFINITION 2. *Un groupe de Lie complexe qui vérifie les propriétés équivalentes du th. 5 est dit réductif.*

THÉORÈME 6. *Soit H un groupe de Lie complexe réductif. Soit G son enveloppe complexe* (en tant que groupe de Lie complexe, cf. n° 4.3). *Alors G est un groupe algébrique linéaire complexe réductif* (au sens algébrique) *et l'application canonique $H \to G(\mathbf{C})$ est un isomorphisme.*

Soit K un sous-groupe compact maximal de H; puisque H est le complexifié de K, les représentations linéaires complexes (holomorphes) de H correspondent bijectivement (par restriction) à celles de K. Il s'ensuit que le groupe G en question n'est autre que *l'enveloppe complexe* $G_{K/\mathbf{C}}$ de K, d'où le théorème.

COROLLAIRE 1. *Soient G_1 et G_2 deux groupes algébriques linéaires complexes, et soit $f: G_1(\mathbf{C}) \to G_2(\mathbf{C})$ un homomorphisme de groupes de Lie complexes. Si G_1 est réductif, f est «algébrique»* (i.e. induit par un morphisme $G_1 \to G_2$).

Cela ne fait que traduire le th. 6.

COROLLAIRE 2. *Le foncteur «enveloppe» est une équivalence de la catégorie des groupes de Lie complexes réductifs sur celle des groupes algébriques linéaires réductifs.*

C'est clair.

Remarque. Soit K un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{C})$, où G est algébrique linéaire réductif sur $\mathbf{C}$. On peut résumer ce qui précède ainsi: l'algèbre affine de G s'identifie à l'algèbre des fonctions holomorphes sur $G(\mathbf{C})$ dont les translatées engendrent un espace vectoriel de dimension finie; par restriction à K, cette algèbre s'applique isomorphiquement sur l'algèbre des fonctions continues complexes sur K dont les translatées engendrent un espace vectoriel de dimension finie.

[On obtient ainsi des bigèbres sur $\mathbf{C}$; à ces bigèbres correspondent des schémas en groupes; à ces schémas en groupes correspondent des groupes de Lie complexes; à ces groupes... Voyez, voyez, la machine tourner!]

Exercices

§ 1

1) Soit E un K-module projectif de type fini. On identifie $\mathrm{End}(E)$ à $E \otimes E'$; on note I l'élément de $E \otimes E'$ correspondant à 1_E, et ${}^tI$ son image dans $E' \otimes E$.

On munit $E \otimes E' = \mathrm{End}(E)$ de la structure de cogèbre *opposée* à celle définie au n° 1.1.

a) Si $x = a \otimes a' \in E \otimes E'$, montrer que $d(x) = a \otimes {}^tI \otimes a'$.

b) On définit une application $d_E : E \to \mathrm{End}(E) \otimes E = E \otimes E' \otimes E$ par $a \mapsto a \otimes {}^tI$. Montrer que cette application définit sur E une structure de comodule à gauche sur $\mathrm{End}(E)$.

c) On identifie $\mathrm{End}(E) \otimes \mathrm{End}(E)$ à $\mathrm{End}(E \otimes E)$ par l'application $(u, v) \mapsto u \otimes v$. D'autre part, si on écrit $\mathrm{End}(E \otimes E)$ sous la forme $E \otimes E \otimes E' \otimes E'$ la permutation des deux facteurs E' définit un automorphisme σ de $\mathrm{End}(E \otimes E)$. Montrer que l'on a

$$d(u) = \sigma(u \otimes 1_E) \quad \text{si} \quad u \in \mathrm{End}(E)\,.$$

d) Soit (v_i) une base de E, et soit $(E_{ij} = v'_j \otimes v_i)$ la base correspondante de $\mathrm{End}(E)$. Montrer que

$$d(E_{ij}) = \sum_k E_{ik} \otimes E_{kj}\,.$$

e) Justifier la Remarque 2 du n° 1.2.

2) Soit C une cogèbre plate, et soit E un comodule sur C.

a) Soit V un K-module tel que E soit isomorphe (comme module) à un quotient de E. Montrer qu'il existe un sous-comodule F de $C \otimes V$ tel que E soit isomorphe (comme comodule) à un quotient de F. (Utiliser le morphisme $C \otimes V \to C \otimes E$ et le fait que E est isomorphe à un sous-comodule de $C \otimes E$.) Montrer que, si K est noethérien, et E de type fini, on peut choisir F de type fini.