Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 39 (1993)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÈBRES
Autor: Serre, Jean-Pierre
Kapitel: 4.2. La bigèbre d'un groupe
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60413

des A-modules de rang fini sur celle des $\hat{A}$-modules topologiques discrets de rang fini.

Soit F le dual de A; on le munit de sa structure naturelle de A-bimodule. Si $\mathfrak{a} \in S$, soit $F_{\mathfrak{a}}$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans F. Soit C la réunion des $F_{\mathfrak{a}}$, pour $\mathfrak{a} \in S$. Le dual de C (resp. le dual topologique de $\hat{A}$) s'identifie de façon évidente à $\hat{A}$ (resp. à C). D'après le n° 2.2, il y a donc sur C une structure de *cogèbre,* caractérisée par la formule:

$$(1) \qquad < d(c), a \otimes b > \; = \; < c, ab > \quad \text{si} \quad c \in C, a, b \in A \, .$$

De plus, tout A-module à droite de rang fini est muni canoniquement d'une structure de comodule à gauche sur C, et réciproquement; on a

$$(2) \qquad < d_E(x), a \otimes x' > \; = \; < xa, x' > \quad \text{si} \quad x \in E, x' \in E', a \in A$$

d'après la formule (1) du n° 2.2.

Les éléments de la cogèbre C peuvent être caractérisés de la manière suivante:

LEMME 1. *Soit f un élément du dual F de A. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $f \in C$.

(b) (resp. (b′)) *Le sous-A-module à gauche* (resp. à droite) *de F engendré par f est de rang fini.*

(c) *Il existe un A-module à droite E de rang fini, et des éléments $x_i \in E, x'_i \in E'$ en nombre fini, tels que*

$$< f, a > \; = \; \sum < x_i a, x'_i > \quad \textit{pour tout} \quad a \in A \, .$$

La condition (b) signifie que l'annulateur de f dans le A-module à gauche F appartient à S_g; comme S est cofinal dans S_g, cela revient à dire que f appartient à C. On démontre de même que (a) $\Leftrightarrow$ (b′).

D'autre part, pour un module E donné, la condition (c) signifie que f appartient à la sous-cogèbre C_E de C attachée à E (cf. n° 2.1). Comme C est réunion des C_E, cela prouve que (a) $\Leftrightarrow$ (c).

[On laisse au lecteur le plaisir de démontrer directement l'équivalence (b) $\Leftrightarrow$ (c).]

4.2. LA BIGÈBRE D'UN GROUPE

On applique ce qui précède à l'algèbre $A = K[\Gamma]$ d'un groupe Γ. Le dual $F = F(\Gamma)$ de A est *l'espace des fonctions* sur Γ; la dualité entre A et F s'exprime par la formule:

$$< f, \sum \lambda_i \gamma_i > \; = \; \sum \lambda_i f(\gamma_i) \quad \text{si} \quad f \in F, \lambda_i \in K, \gamma_i \in \Gamma \, .$$

La cogèbre correspondante est notée $C = C(\Gamma)$. Elle jouit des propriétés suivantes:

(i) La co-unité de C est l'application $e: f \mapsto f(1)$.

(ii) Pour qu'une fonction f appartienne à C, il faut et il suffit que *ses translatées* (à gauche ou à droite) *engendrent un K-espace vectoriel de dimension finie.* (C'est l'équivalence (a) $\Leftrightarrow$ (b) du Lemme 1.)

(iii) Identifions à la façon habituelle les éléments de $F \otimes F$ aux *fonctions décomposables* sur $\Gamma \times \Gamma$. Si $f \in C$, on a $d(f) \in C \otimes C$ et $C \otimes C$ est un sous-espace de $F \otimes F$; ainsi $d(f)$ peut être interprétée comme une fonction sur $\Gamma \times \Gamma$. *On a*:

$$d(f)(\gamma_1, \gamma_2) = f(\gamma_1\gamma_2) \quad \text{si} \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma \,. \tag{3}$$

(Cela ne fait que traduire la formule (1) du n° précédent.)

(iv) C contient 1, et est stable par le *produit*: cela résulte de (ii).

(v) Les structures de cogèbre et d'algèbre de C sont *compatibles* entre elles, i.e. elles font de C une *bigèbre.* Cette bigèbre vérifie les axiomes du n° 3.1. (L'axiome (i) dit que $f \mapsto d(f)$ doit être un morphisme d'*algèbres*; c'est le cas. Les autres axiomes sont encore plus évidents.)

(vi) La bigèbre C possède une *inversion* i donnée par

$$i(f)(\gamma) = f(\gamma^{-1}) \,. \tag{4}$$

(Il faut vérifier les conditions (a) et (b) du n° 3.1. La condition (a) est évidemment satisfaite. Pour (b), soit $f \in C$ et écrivons $d(f)$ sous la forme $\sum_\alpha g_\alpha \otimes h_\alpha$. On a

$$(1_C \otimes i)(d(f)) = \sum g_\alpha \otimes i(h_\alpha)$$

et l'on doit voir que $\sum g_\alpha . i(h_\alpha) = e(f) . 1$. Or, si $\gamma \in \Gamma$, on a

$$\begin{aligned} \sum g_\alpha(\gamma) i(h_\alpha)(\gamma) &= \sum g_\alpha(\gamma) h_\alpha(\gamma^{-1}) = d(f)(\gamma, \gamma^{-1}) \\ &= f(\gamma . \gamma^{-1}) = f(1) = e(f) \,, \end{aligned}$$

d'où la formule voulue.)

(vii) Soit $G = \operatorname{Spec}(C)$ le *schéma en groupes* attaché à C. Tout élément $\gamma \in \Gamma$ définit un morphisme $f \mapsto f(\gamma)$ de C dans K, donc un élément du groupe $G(K)$ des points de G à valeurs dans K. *L'application* $\Gamma \to G(K)$ *ainsi définie est un homomorphisme*; cela résulte de la définition de la loi de composition de $G(K)$.

(viii) D'après le n° 4.1, tout Γ-module à droite E de rang fini est muni canoniquement d'une structure de C-comodule à gauche de rang fini (et inversement). Plus précisément, si $(v_i)_{i \in I}$ est une base de E, et si l'on a

$$(5) \qquad v_i\gamma = \sum_{j \in I} c_{ij}(\gamma)v_j \ , \qquad \text{avec} \qquad c_{ij} \in C \ ,$$

le coproduit de E est donné par:

$$(6) \qquad d_E(v_i) = \sum_{j \in I} c_{ij} \otimes v_j \ .$$

(ix) La correspondance définie ci-dessus entre Γ-modules à droite de rang fini et C-comodules à gauche de rang fini est *compatible* avec les opérations «produit tensoriel» et «contragrédiente»; cela résulte de ce qui a été dit au n° 3.2, combiné avec (vii) ci-dessus.

Remarque. On peut caractériser $G = \operatorname{Spec}(C)$ par la propriété universelle suivante: tout homomorphisme de Γ dans le groupe $H(K)$ des K-points d'un schéma en groupe affine H se prolonge de manière unique en un morphisme $G \to H$. Le foncteur $\Gamma \mapsto G$ est donc *adjoint* du foncteur $H \mapsto H(K)$.

4.3. L'ENVELOPPE D'UN GROUPE RELATIVEMENT À UNE CATÉGORIE DE REPRÉSENTATIONS

On conserve les notations du numéro précédent.

DÉFINITION 1. *Soit L une sous-catégorie pleine de la catégorie des Γ-modules à gauche de rang fini. On dit que L est saturée si L vérifie les conditions suivantes:*

a) *Si $E \in L$ et si F est isomorphe, soit à un quotient de E, soit à un sous-objet de E, on a $F \in L$.*

b) *L est stable par somme directe finie, produit tensoriel et contragrédiente.*

c) *La représentation unité (de module K) appartient à L.* (Bien entendu, on a une notion analogue pour les Γ-modules à droite.)

THÉORÈME 1. *Si L est saturée, il existe une sous-bigèbre C_L de $C(\Gamma)$ et une seule telle que L soit la catégorie des C_L-comodules à droite de rang fini. La bigèbre C_L contient l'élément* 1, *vérifie les axiomes du* n° 3.1, *et est stable par l'inversion i.*

Cela résulte des props. 2 et 3 du n° 3.3.