Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÈBRES

Autor: Serre, Jean-Pierre

Kapitel: 4.1. COMPLÉTION D'UNE ALGÈBRE

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60413

DÉFINITION 3. *Soit* C *une bigèbre possédant une inversion. Un* C*-comodule* E *de rang fini est dit fidèle si* $C(E \oplus \check{E}) = C$.

Vu ce qui précède, E est fidèle si et seulement si $G \to G_E$ est un isomorphisme.

PROPOSITION 8. *Si* E *est fidèle, toute représentation linéaire de* G *est quotient d'une sous-représentation d'une somme directe de représentations* $\overset{n}{\otimes}(E \oplus \check{E})$.

Cela résulte du lemme 1 du n° 2.4.

COROLLAIRE. *Tout* G*-module simple est quotient de Jordan-Hölder d'un* $\overset{n}{\otimes}(E \oplus \check{E})$.

Remarques

1) Dans le corollaire ci-dessus, on peut remplacer les puissances tensorielles de $E \oplus \check{E}$ par les représentations $\overset{n}{\otimes} E \overset{m}{\otimes} \det(E)^{-1}$, avec des notations évidentes.

2) Il se peut que G_E soit fermé dans End_E (et non pas seulement dans $\mathbf{GL}_E$), autrement dit que $C(E) = C(E \oplus \check{E})$. C'est le cas, par exemple, si G_E est contenu dans $\mathbf{SL}_E$. Dans ce cas, la prop. 8 et son corollaire se simplifient: on peut remplacer les puissances tensorielles de $E \oplus \check{E}$ par celles de E.

§4. ENVELOPPES

4.1. COMPLÉTION D'UNE ALGÈBRE

[Ce sorite pourrait remonter au n° 2.2.]

Soit A une algèbre associative à élément unité. Soit S_d (resp. S_g, S) l'ensemble des idéaux à droite (resp. à gauche, resp. bilatères) de codimension finie dans A. On a $S_d \cap S_g = S$ et S est *cofinal* à la fois dans S_d et dans S_g; en effet, si $\mathfrak{a} \in S_g$ par exemple, l'annulateur du A-module $A/\mathfrak{a}$ appartient à S et est contenu dans $\mathfrak{a}$.

On posera:

$$\hat{A} = \varprojlim . A/\mathfrak{a}$$

la limite projective étant prise sur l'ensemble ordonné filtrant S. L'algèbre $\hat{A}$ est *l'algèbre profinie complétée* de A, pour la topologie définie par S (ou S_d, ou S_g, cela revient au même). Il y a un isomorphisme évident de la catégorie des A-modules de rang fini sur celle des $\hat{A}$-modules topologiques discrets de rang fini.

Soit F le dual de A; on le munit de sa structure naturelle de A-bimodule. Si $\mathfrak{a} \in S$, soit $F_{\mathfrak{a}}$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans F. Soit C la réunion des $F_{\mathfrak{a}}$, pour $\mathfrak{a} \in S$. Le dual de C (resp. le dual topologique de $\hat{A}$) s'identifie de façon évidente à $\hat{A}$ (resp. à C). D'après le n° 2.2, il y a donc sur C une structure de *cogèbre,* caractérisée par la formule:

(1) $$< d(c), a \otimes b > \; = \; < c, ab > \quad \text{si} \quad c \in C, a, b \in A \, .$$

De plus, tout A-module à droite de rang fini est muni canoniquement d'une structure de comodule à gauche sur C, et réciproquement; on a

(2) $$< d_E(x), a \otimes x' > \; = \; < xa, x' > \quad \text{si} \quad x \in E, x' \in E', a \in A$$

d'après la formule (1) du n° 2.2.

Les éléments de la cogèbre C peuvent être caractérisés de la manière suivante:

LEMME 1. *Soit f un élément du dual F de A. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $f \in C$.

(b) (resp. (b′)) *Le sous-A-module à gauche* (resp. à droite) *de F engendré par f est de rang fini.*

(c) *Il existe un A-module à droite E de rang fini, et des éléments $x_i \in E, x'_i \in E'$ en nombre fini, tels que*

$$< f, a > \; = \; \sum < x_i a, x'_i > \quad \textit{pour tout} \quad a \in A \, .$$

La condition (b) signifie que l'annulateur de f dans le A-module à gauche F appartient à S_g; comme S est cofinal dans S_g, cela revient à dire que f appartient à C. On démontre de même que (a) $\Leftrightarrow$ (b′).

D'autre part, pour un module E donné, la condition (c) signifie que f appartient à la sous-cogèbre C_E de C attachée à E (cf. n° 2.1). Comme C est réunion des C_E, cela prouve que (a) $\Leftrightarrow$ (c).

[On laisse au lecteur le plaisir de démontrer directement l'équivalence (b) $\Leftrightarrow$ (c).]

4.2. LA BIGÈBRE D'UN GROUPE

On applique ce qui précède à l'algèbre $A = K[\Gamma]$ d'un groupe Γ. Le dual $F = F(\Gamma)$ de A est *l'espace des fonctions* sur Γ; la dualité entre A et F s'exprime par la formule:

$$< f, \sum \lambda_i \gamma_i > \; = \; \sum \lambda_i f(\gamma_i) \quad \text{si} \quad f \in F, \lambda_i \in K, \gamma_i \in \Gamma \, .$$