

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 39 (1993)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÈBRES
Autor: Serre, Jean-Pierre
Kapitel: 4.1. COMPLÉTION D'UNE ALGÈBRE
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-60413>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

DÉFINITION 3. Soit C une bigèbre possédant une inversion. Un C -comodule E de rang fini est dit fidèle si $C(E \oplus \check{E}) = C$.

Vu ce qui précède, E est fidèle si et seulement si $G \rightarrow G_E$ est un isomorphisme.

PROPOSITION 8. Si E est fidèle, toute représentation linéaire de G est quotient d'une sous-représentation d'une somme directe de représentations $\bigotimes^n (E \oplus \check{E})$.

Cela résulte du lemme 1 du n° 2.4.

COROLLAIRE. Tout G -module simple est quotient de Jordan-Hölder d'un $\bigotimes^n (E \oplus \check{E})$.

Remarques

1) Dans le corollaire ci-dessus, on peut remplacer les puissances tensorielles de $E \oplus \check{E}$ par les représentations $\bigotimes^n E \otimes^m \det(E)^{-1}$, avec des notations évidentes.

2) Il se peut que G_E soit fermé dans End_E (et non pas seulement dans \mathbf{GL}_E), autrement dit que $C(E) = C(E \oplus \check{E})$. C'est le cas, par exemple, si G_E est contenu dans \mathbf{SL}_E . Dans ce cas, la prop. 8 et son corollaire se simplifient: on peut remplacer les puissances tensorielles de $E \oplus \check{E}$ par celles de E .

§ 4. ENVELOPPES

4.1. COMPLÉTION D'UNE ALGÈBRE

[Ce sorite pourrait remonter au n° 2.2.]

Soit A une algèbre associative à élément unité. Soit S_d (resp. S_g, S) l'ensemble des idéaux à droite (resp. à gauche, resp. bilatères) de codimension finie dans A . On a $S_d \cap S_g = S$ et S est *cofinal* à la fois dans S_d et dans S_g ; en effet, si $\mathfrak{a} \in S_g$ par exemple, l'annulateur du A -module A/\mathfrak{a} appartient à S et est contenu dans \mathfrak{a} .

On posera:

$$\hat{A} = \lim_{\leftarrow} .A/\mathfrak{a}$$

la limite projective étant prise sur l'ensemble ordonné filtrant S . L'algèbre \hat{A} est l'*algèbre profinie complétée* de A , pour la topologie définie par S (ou S_d , ou S_g , cela revient au même). Il y a un isomorphisme évident de la catégorie

des A -modules de rang fini sur celle des \hat{A} -modules topologiques discrets de rang fini.

Soit F le dual de A ; on le munit de sa structure naturelle de A -bimodule. Si $\alpha \in S$, soit F_α l'orthogonal de α dans F . Soit C la réunion des F_α , pour $\alpha \in S$. Le dual de C (resp. le dual topologique de \hat{A}) s'identifie de façon évidente à \hat{A} (resp. à C). D'après le n° 2.2, il y a donc sur C une structure de *cogèbre*, caractérisée par la formule:

$$(1) \quad \langle d(c), a \otimes b \rangle = \langle c, ab \rangle \quad \text{si } c \in C, a, b \in A.$$

De plus, tout A -module à droite de rang fini est muni canoniquement d'une structure de comodule à gauche sur C , et réciproquement; on a

$$(2) \quad \langle d_E(x), a \otimes x' \rangle = \langle xa, x' \rangle \quad \text{si } x \in E, x' \in E', a \in A$$

d'après la formule (1) du n° 2.2.

Les éléments de la cogèbre C peuvent être caractérisés de la manière suivante:

LEMME 1. *Soit f un élément du dual F de A . Les conditions suivantes sont équivalentes:*

$$(a) \quad f \in C.$$

(b) (resp. (b')) *Le sous- A -module à gauche (resp. à droite) de F engendré par f est de rang fini.*

(c) *Il existe un A -module à droite E de rang fini, et des éléments $x_i \in E, x'_i \in E'$ en nombre fini, tels que*

$$\langle f, a \rangle = \sum \langle x_i a, x'_i \rangle \quad \text{pour tout } a \in A.$$

La condition (b) signifie que l'annulateur de f dans le A -module à gauche F appartient à S_g ; comme S est cofinal dans S_g , cela revient à dire que f appartient à C . On démontre de même que (a) \Leftrightarrow (b').

D'autre part, pour un module E donné, la condition (c) signifie que f appartient à la sous-cogèbre C_E de C attachée à E (cf. n° 2.1). Comme C est réunion des C_E , cela prouve que (a) \Leftrightarrow (c).

[On laisse au lecteur le plaisir de démontrer directement l'équivalence (b) \Leftrightarrow (c).]

4.2. LA BIGÈBRE D'UN GROUPE

On applique ce qui précède à l'algèbre $A = K[\Gamma]$ d'un groupe Γ . Le dual $F = F(\Gamma)$ de A est *l'espace des fonctions* sur Γ ; la dualité entre A et F s'exprime par la formule:

$$\langle f, \sum \lambda_i \gamma_i \rangle = \sum \lambda_i f(\gamma_i) \quad \text{si } f \in F, \lambda_i \in K, \gamma_i \in \Gamma.$$