

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 39 (1993)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** GÈBRES  
**Autor:** Serre, Jean-Pierre  
**Kapitel:** 3.5. Interprétation de  $G$  comme limite projective de groupes ALGÉBRIQUES LINÉAIRES  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-60413>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Soit d'autre part  $d': C \otimes C \rightarrow C \otimes C \otimes C$  le coproduit du comodule  $C \otimes C$ . On vérifie sans difficulté que l'on a

$$d'(a \otimes b) = \sum_{i,j} a_i b_j \otimes x_i \otimes x_j ,$$

d'où

$$(**) \quad \varphi_u(C \otimes C)(a \otimes b) = \sum_{i,j} u(a_i b_j) \otimes x_i \otimes x_j .$$

En comparant (\*) et (\*\*), on voit que  $\varphi_u(C \otimes C) = \varphi_u(C) \otimes \varphi_u(C)$  si  $u$  est un homomorphisme d'algèbres. Pour prouver la réciproque, choisissons pour  $(x_i)_{i \in I}$  une base telle que  $x_0 = 1$  pour un élément  $0 \in I$  et  $e(x_i) = 0$  pour  $i \neq 0$ . On a alors  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ , et l'égalité de (\*) et (\*\*) entraîne  $u(a)u(b) = u(ab)$ , ce qui achève la démonstration.

La prop. 4 est une conséquence immédiate des deux lemmes ci-dessus. En effet, un élément de  $G(K_1)$  est *par définition* un homomorphisme d'algèbres  $u: C \rightarrow K_1$  tel que  $u(1) = 1$ . La seule chose à vérifier, c'est que, pour tout comodule  $E$ , l'endomorphisme  $u(E)$  de  $K_1 \otimes E$  défini par  $u$  est égal à  $\varphi_u(E)$ : or c'est justement la définition de  $u(E)$ , cf. démonstration de la prop. 1.

*Exemple.* Prenons pour  $K_1$  l'algèbre des  *nombres duals* sur  $K$ . La prop. 4 fournit alors un anti-isomorphisme de *l'algèbre de Lie* de  $G$  sur la sous-algèbre de Lie de  $\text{End}(v)$  formée des endomorphismes  $\theta$  de  $v$  tels que

$$\theta(K) = 0 \quad \text{et} \quad \theta(E_1 \otimes E_2) = \theta(E_1) \otimes 1_{E_2} + 1_{E_1} \otimes \theta(E_2) .$$

### 3.5. INTERPRÉTATION DE $G$ COMME LIMITE PROJECTIVE DE GROUPES ALGÉBRIQUES LINÉAIRES

DÉFINITION 2. *On dit que  $C$  est de type fini (ou que  $G$  est algébrique linéaire) si  $C$  est de type fini comme algèbre sur  $K$ .*

PROPOSITION 5. *Soit  $C$  une bigèbre (resp. une bigèbre possédant une inversion  $i$ ). Alors  $C$  est limite inductive filtrante de ses sous-bigèbres de type fini contenant 1 (resp. et stables par  $i$ ).*

L'énoncé contenant les «resp.» équivaut à:

COROLLAIRE. *Le schéma en groupes  $G$  associé à  $C$  est limite projective filtrante de groupes algébriques linéaires.*

On va prouver un résultat plus précis. Soit  $E$  un  $C$ -comodule (à droite, pour changer un peu) de rang fini et soit  $C_E$  la sous-cogèbre de  $C$  correspondante.

Pour tout  $n \geq 0$ , soit  $C_E(n)$  la sous-cogèbre attachée au comodule  $\bigotimes^n E$ ; pour  $n = 0$ , on convient comme d'ordinaire que  $\bigotimes^0 E = K$ , de sorte que  $C_E(0) = K \cdot 1$ . On sait (cf. lemme 1) que

$$C_E(n) = C_E \dots C_E \quad (n \text{ facteurs}) .$$

Il en résulte que

$$C(E) = \sum_{n=0}^{\infty} C_E(n)$$

est la *sous-algèbre* de  $C$  engendrée par  $C_E$  et  $1$ . D'où:

**PROPOSITION 6.** *L'algèbre  $C(E)$  est une sous-bigèbre de  $C$  contenant  $1$  et de type fini; c'est la plus petite sous-bigèbre de  $C$  contenant  $1$  et  $C_E$ .*

Comme  $C$  est visiblement limite inductive des  $C(E)$ , cela démontre la première partie de la prop. 5. D'autre part, lorsque  $C$  possède une inversion  $i$ , la seconde partie de la prop. 5 résulte de la proposition plus précise (mais évidente) suivante:

**PROPOSITION 7.** *L'algèbre  $C(E \oplus \check{E})$  est une sous-bigèbre de  $C$  contenant  $1$  et stable par  $i$ ; c'est la plus petite sous-bigèbre de  $C$  ayant ces propriétés; elle est de type fini.*

Si l'on note  $X_E$  (resp.  $G_E$ ) le monoïde (resp. groupe) algébrique linéaire associé à  $C(E)$  (resp. à  $C(E \oplus \check{E})$ ), on voit que l'on a

$$G = \lim_{\leftarrow} . X_E \quad (\text{resp. } G = \lim_{\leftarrow} . G_E) .$$

### Remarques

1) La construction de  $C(E \oplus \check{E})$  à partir de  $C(E)$  peut aussi se faire de la manière suivante: au  $G$ -module  $E$  est associé un élément «déterminant»  $\delta_E$ , qui est un élément inversible de  $C$ , contenu dans  $C(E)$ . On a:

$$C(E \oplus \check{E}) = C(E) \left[ \frac{1}{\delta_E} \right] .$$

2) L'interprétation de  $X_E$  et  $G_E$  en termes de schémas est la suivante:  $X_E$  (resp.  $G_E$ ) est le plus petit sous-schéma fermé du schéma  $\text{End}_E$  (resp.  $\text{GL}_E$ ) des endomorphismes (resp. automorphismes) de  $E$  contenant l'image de la représentation  $\rho: G \rightarrow \text{End}_E$  attachée à  $E$ . Cela se vérifie immédiatement sur la construction de l'algèbre affine de  $\text{End}_E$  (resp.  $G_E$ ), construction que le rédacteur trouve inutile de reproduire.

DÉFINITION 3. Soit  $C$  une bigèbre possédant une inversion. Un  $C$ -comodule  $E$  de rang fini est dit fidèle si  $C(E \oplus \check{E}) = C$ .

Vu ce qui précède,  $E$  est fidèle si et seulement si  $G \rightarrow G_E$  est un isomorphisme.

PROPOSITION 8. Si  $E$  est fidèle, toute représentation linéaire de  $G$  est quotient d'une sous-représentation d'une somme directe de représentations  $\bigotimes^n (E \oplus \check{E})$ .

Cela résulte du lemme 1 du n° 2.4.

COROLLAIRE. Tout  $G$ -module simple est quotient de Jordan-Hölder d'un  $\bigotimes^n (E \oplus \check{E})$ .

### Remarques

1) Dans le corollaire ci-dessus, on peut remplacer les puissances tensorielles de  $E \oplus \check{E}$  par les représentations  $\bigotimes^n E \otimes^m \det(E)^{-1}$ , avec des notations évidentes.

2) Il se peut que  $G_E$  soit fermé dans  $\text{End}_E$  (et non pas seulement dans  $\mathbf{GL}_E$ ), autrement dit que  $C(E) = C(E \oplus \check{E})$ . C'est le cas, par exemple, si  $G_E$  est contenu dans  $\mathbf{SL}_E$ . Dans ce cas, la prop. 8 et son corollaire se simplifient: on peut remplacer les puissances tensorielles de  $E \oplus \check{E}$  par celles de  $E$ .

## § 4. ENVELOPPES

### 4.1. COMPLÉTION D'UNE ALGÈBRE

[Ce sorite pourrait remonter au n° 2.2.]

Soit  $A$  une algèbre associative à élément unité. Soit  $S_d$  (resp.  $S_g, S$ ) l'ensemble des idéaux à droite (resp. à gauche, resp. bilatères) de codimension finie dans  $A$ . On a  $S_d \cap S_g = S$  et  $S$  est *cofinal* à la fois dans  $S_d$  et dans  $S_g$ ; en effet, si  $\mathfrak{a} \in S_g$  par exemple, l'annulateur du  $A$ -module  $A/\mathfrak{a}$  appartient à  $S$  et est contenu dans  $\mathfrak{a}$ .

On posera:

$$\hat{A} = \lim_{\leftarrow} . A/\mathfrak{a}$$

la limite projective étant prise sur l'ensemble ordonné filtrant  $S$ . L'algèbre  $\hat{A}$  est l'*algèbre profinie complétée* de  $A$ , pour la topologie définie par  $S$  (ou  $S_d$ , ou  $S_g$ , cela revient au même). Il y a un isomorphisme évident de la catégorie