

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 39 (1993)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÈBRES
Autor: Serre, Jean-Pierre
Kapitel: 3.4. Une interprétation des points de G
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-60413>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

[Il y a un résultat plus général, dû sauf erreur à Grothendieck, et que le rédacteur a la flemme de rédiger en détail. Au lieu de se donner, comme ici, une sous-cogèbre d'une bigèbre, on se donne seulement une *cogèbre* D et une opération de «produit tensoriel» sur la catégorie $M = \text{Com}_D^f$ correspondante (la donnée de D est d'ailleurs équivalente à celle du couple formé de M et du foncteur $v: M \rightarrow \text{Vect}_K$, cf. n° 2.5, th. 3). En imposant à ce produit tensoriel des conditions raisonnables (en particulier $v(E \otimes F) \simeq v(E) \otimes v(F)$) on démontre alors qu'il provient d'une structure de *bigèbre* bien déterminée sur D ; cette bigèbre a un élément unité si M contient un élément unité pour le produit tensoriel; elle a une inversion, si l'on se donne une opération «contragrédiente». (Au lieu de se donner le produit tensoriel et la contragrédiente, on peut aussi se donner un foncteur «Hom».)

Grothendieck a rencontré cette situation avec $K = \mathbf{Q}$, $M =$ catégorie des *motifs* sur un corps de base k et $v =$ foncteur «cohomologie à valeurs dans \mathbf{Q} » relativement à un plongement de k dans \mathbf{C} .]

3.4. UNE INTERPRÉTATION DES POINTS DE G

Soit $K_1 \in \text{Alg}_K$ et soit $g \in G(K_1)$ un point de G à valeurs dans K_1 . Pour tout $E \in \text{Com}_C^f$, notons $g(E)$ l'image de g par l'antreprésentation

$$\rho(E): G(K_1) \rightarrow \text{End}_E(K_1).$$

On a donc $g(E) \in \text{End}_E(K_1) = \text{End}_{K_1}(K_1 \otimes E)$, et de plus:

- (i) $g(K) = 1_{K_1}$
- (ii) $g(E_1 \otimes E_2) = g(E_1) \otimes g(E_2)$.

Réiproquement:

PROPOSITION 4. *Soit $v_{K_1}: \text{Com}_C^f \rightarrow \text{Mod}_{K_1}$ le foncteur qui associe à tout $E \in \text{Com}_C^f$ le K_1 -module $K_1 \otimes E$. Soit $\varphi: v_{K_1} \rightarrow v_{K_1}$ un endomorphisme de v_{K_1} vérifiant les relations (i) et (ii) ci-dessus. Il existe alors un élément unique $g \in G(K_1)$ tel que $\varphi = g$.*

D'après 3.2, l'application $G(K_1) \rightarrow \text{End}(v_{K_1})$ est un antihomomorphisme de monoïdes. La prop. 4 donne donc:

COROLLAIRE. *Le monoïde $G(K_1)$ est isomorphe à l'opposé du monoïde des endomorphismes de v_{K_1} vérifiant (i) et (ii).*

[C'est là un résultat analogue au théorème de dualité de Tannaka; on reviendra là-dessus plus loin.]

Remarques

1) Dans l'énoncé de la prop. 4, on peut remplacer Com_C^f par Com_C ; cela revient au même, du fait que tout objet de Com_C est limite inductive d'objets de Com_C^f , cf. §1.

2) Lorsque G est un *schéma en groupes*, les $g(E)$ vérifient la relation suivante (qui est donc conséquence de (i) et (ii)):

$$(iii) \quad g(\check{E}) = g(E)^\vee.$$

Démonstration de la proposition 4.

Tout d'abord, soit $u \in \text{Hom}(C, K_1)$. Pour tout $E \in \text{Com}_C$, soit $\varphi_u(E)$ l'endomorphisme de $K_1 \otimes E$ qui prolonge l'application linéaire

$$E \xrightarrow{d_E} C \otimes E \xrightarrow{u \otimes 1} K_1 \otimes E.$$

On obtient ainsi un *endomorphisme* φ_u de v_{K_1} .

LEMME 1. *L'application $u \mapsto \varphi_u$ est un isomorphisme de $\text{Hom}(C, K_1)$ sur le groupe des endomorphismes du foncteur v_{K_1} .*

[En fait, c'est un isomorphisme de K_1 -algèbres, à condition de mettre sur $\text{Hom}(C, K_1)$ la structure d'algèbre opposée de celle à laquelle on pense.]

Si $\varphi \in \text{End}(v_{K_1})$, formons le composé

$$C \rightarrow K_1 \otimes C \rightarrow K_1 \otimes C \rightarrow K_1$$

(la première application étant $x \mapsto 1 \otimes x$, la seconde $\varphi(C)$ et la troisième $1 \otimes e$). On obtient une application linéaire

$$u(\varphi) : C \rightarrow K_1.$$

Il suffit de prouver que les applications $u \mapsto \varphi_u$ et $\varphi \mapsto u(\varphi)$ sont inverses l'une de l'autre.

Tout d'abord, si $u \in \text{Hom}(C, K_1)$, $u(\varphi_u)$ est le composé

$$C \xrightarrow{d} C \otimes C \xrightarrow{u \otimes 1} K_1 \otimes C \xrightarrow{1 \otimes e} K_1,$$

ou encore

$$C \xrightarrow{d} C \otimes C \xrightarrow{1 \otimes e} C \xrightarrow{u} K_1,$$

c'est-à-dire u .

Soit maintenant $\varphi \in \text{End}(v_{K_1})$. Si E est un comodule, et V un K -espace vectoriel, on a $\varphi(E \otimes V) = \varphi(E) \otimes 1_V$. (Se ramener au cas où V est de dimension finie, puis choisir une base de V et utiliser le fait que φ est un

morphisme de foncteurs.) En particulier, on a $\phi(C \otimes E) = \phi(C) \otimes 1_E$ si $E \in \text{Com}_C$. Comme $d_E: E \rightarrow C \otimes E$ est un morphisme de comodules, on a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} E & \rightarrow & K_1 \otimes E & \xrightarrow{1 \otimes d_E} & K_1 \otimes C \otimes E \\ \phi(E) \downarrow & & \downarrow \phi(C) \otimes 1 & & \\ K_1 \otimes E & \xrightarrow[1 \otimes d_E]{} & K_1 \otimes C \otimes E & \xrightarrow{1 \otimes C \otimes 1} & K_1 \otimes E . \end{array}$$

Mais le composé $(1 \otimes e \otimes 1) \circ (1 \otimes d_E)$ est l'identité. En utilisant la commutativité du diagramme, on en déduit alors que le composé

$$E \rightarrow K_1 \otimes E \xrightarrow{\phi(E)} K_1 \otimes E$$

est égal à $\phi_u(E)$, avec $u = u(\phi)$, d'où le lemme.

[Ce lemme n'a rien à voir avec les bigèbres. On aurait pu le remonter au § 2 et le déduire de l'isomorphisme $\text{Com}_C^f = \text{Com}_{A^o}^f$ du n° 2.2.]

LEMME 2. (a) *Pour que ϕ_u vérifie la relation (i), il faut et il suffit que $u(1) = 1$.*

(b) *Pour que ϕ_u vérifie la relation (ii), il faut et il suffit que u soit un homomorphisme d'algèbres.*

Si l'on prend pour E le module unité K , on a $K_1 \otimes E = K_1$ et $\phi_u(E)$ est la multiplication par $u(1)$ dans K_1 ; d'où (a).

Pour (b), on remarque d'abord que (ii) est vérifiée si et seulement si elle l'est pour $E_1 = E_2 = C$, i.e. si

$$(ii') \quad \phi_u(C \otimes C) = \phi_u(C) \otimes \phi_u(C).$$

Cela résulte simplement de ce que tout comodule est isomorphe à un sous-comodule d'une somme directe de comodules tous isomorphes à C .

Reste à exprimer la condition (ii'). Soit $(x_i)_{i \in I}$ une base de C , soient $a, b \in C$, et écrivons $d(a)$ et $d(b)$ sous la forme

$$\begin{aligned} d(a) &= \sum a_i \otimes x_i, \quad a_i \in C \\ d(b) &= \sum b_j \otimes x_j, \quad b_j \in C. \end{aligned}$$

On a alors:

$$\phi_u(C)(a) = \sum u(a_i) \otimes x_i, \quad \text{avec } u(a_i) \in K_1$$

et

$$\phi_u(C)(b) = \sum u(b_j) \otimes x_j, \quad \text{avec } u(b_j) \in K_1.$$

D'où:

$$(*) \quad (\phi_u(C) \otimes \phi_u(C))(a \otimes b) = \sum_{i,j} u(a_i)u(b_j) \otimes x_i \otimes x_j.$$

Soit d'autre part $d': C \otimes C \rightarrow C \otimes C \otimes C$ le coproduit du comodule $C \otimes C$. On vérifie sans difficulté que l'on a

$$d'(a \otimes b) = \sum_{i,j} a_i b_j \otimes x_i \otimes x_j ,$$

d'où

$$(**) \quad \varphi_u(C \otimes C)(a \otimes b) = \sum_{i,j} u(a_i b_j) \otimes x_i \otimes x_j .$$

En comparant (*) et (**), on voit que $\varphi_u(C \otimes C) = \varphi_u(C) \otimes \varphi_u(C)$ si u est un homomorphisme d'algèbres. Pour prouver la réciproque, choisissons pour $(x_i)_{i \in I}$ une base telle que $x_0 = 1$ pour un élément $0 \in I$ et $e(x_i) = 0$ pour $i \neq 0$. On a alors $a_0 = a$ et $b_0 = b$, et l'égalité de (*) et (**) entraîne $u(a)u(b) = u(ab)$, ce qui achève la démonstration.

La prop. 4 est une conséquence immédiate des deux lemmes ci-dessus. En effet, un élément de $G(K_1)$ est *par définition* un homomorphisme d'algèbres $u: C \rightarrow K_1$ tel que $u(1) = 1$. La seule chose à vérifier, c'est que, pour tout comodule E , l'endomorphisme $u(E)$ de $K_1 \otimes E$ défini par u est égal à $\varphi_u(E)$: or c'est justement la définition de $u(E)$, cf. démonstration de la prop. 1.

Exemple. Prenons pour K_1 l'algèbre des *nombres duals* sur K . La prop. 4 fournit alors un anti-isomorphisme de *l'algèbre de Lie* de G sur la sous-algèbre de Lie de $\text{End}(v)$ formée des endomorphismes θ de v tels que

$$\theta(K) = 0 \quad \text{et} \quad \theta(E_1 \otimes E_2) = \theta(E_1) \otimes 1_{E_2} + 1_{E_1} \otimes \theta(E_2) .$$

3.5. INTERPRÉTATION DE G COMME LIMITE PROJECTIVE DE GROUPES ALGÉBRIQUES LINÉAIRES

DÉFINITION 2. *On dit que C est de type fini (ou que G est algébrique linéaire) si C est de type fini comme algèbre sur K .*

PROPOSITION 5. *Soit C une bigèbre (resp. une bigèbre possédant une inversion i). Alors C est limite inductive filtrante de ses sous-bigèbres de type fini contenant 1 (resp. et stables par i).*

L'énoncé contenant les «resp.» équivaut à:

COROLLAIRE. *Le schéma en groupes G associé à C est limite projective filtrante de groupes algébriques linéaires.*

On va prouver un résultat plus précis. Soit E un C -comodule (à droite, pour changer un peu) de rang fini et soit C_E la sous-cogèbre de C correspondante.