Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÈBRES

Autor: Serre, Jean-Pierre

Kapitel: 3.3. SOUS-BIGÈBRES

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60413

3.3. Sous-bigèbres

(On suppose à nouveau que K est un corps.)
Soit C une bigèbre (vérifiant les conditions du n° 3.1), et soit L une sous-catégorie abélienne de Com_C^f vérifiant les conditions 1), 2), 3) du th. 2 du n° 2.4, i.e. provenant d'une sous-cogèbre D de C.

Proposition 2. *Pour que D soit une sous-bigèbre de C contenant 1, il faut et il suffit que L soit stable par produit tensoriel et contienne le comodule unité K.*

La nécessité est triviale. Supposons donc que L soit stable par $\otimes$ et contienne K. On sait (cf. n° 2.4) que D est réunion des cogèbres C_E attachées aux comodules $E \in L$. Le fait que D soit stable par le produit résultera donc du lemme suivant:

Lemme 1. *Si E et F sont des comodules de rang fini, on a*

$$C_{E \otimes F} = C_E . C_F \; . \tag{*}$$

En effet, on vérifie tout de suite que $C_E \otimes C_F$ est la sous-cogèbre de $C \otimes C$ attachée au $C \otimes C$-comodule $E \otimes F$. Comme $C_{E \otimes F}$ est l'image de cette dernière par $m : C \otimes C \to C$, c'est bien $C_E . C_F$.

Le fait que D contienne 1 provient de ce que $C_E = K . 1$ si $E = K$.

Proposition 3. *Supposons que C ait une inversion i. Pour que D soit stable par i, il faut et il suffit que L soit stable par le foncteur «contragrédiente».*

Cela résulte, comme ci-dessus, de la formule:

$$C_{\check{E}} = i(C_E) \; . \tag{**}$$

Corollaire. *Supposons que $G = \mathrm{Spec}(C)$ soit un schéma en groupes. Soit Mod_G^f la catégorie des G-modules de rang fini, et soit L une sous-catégorie abélienne de Mod_G^f. Pour qu'il existe un quotient H de G tel que $L = \mathrm{Mod}_H^f$, il faut et il suffit que L vérifie les conditions* 1), 2), 3) *du th. 2 du n° 2.4, soit stable par les opérations «produit tensoriel» et «contragrédiente», et contienne le G-module unité K; le groupe H en question est alors unique.*

Ce n'est qu'une reformulation des props. 2 et 3, étant entendu que «groupe quotient» est pris pour synonyme de «sous-bigèbre contenant 1». L'unicité de H provient du th. 2 du n° 2.4.

[Il y a un résultat plus général, dû sauf erreur à Grothendieck, et que le rédacteur a la flemme de rédiger en détail. Au lieu de se donner, comme ici, une sous-cogèbre d'une bigèbre, on se donne seulement une *cogèbre* D et une opération de «produit tensoriel» sur la catégorie $M = \mathrm{Com}^f_D$ correspondante (la donnée de D est d'ailleurs équivalente à celle du couple formé de M et du foncteur $v: M \to \mathrm{Vect}_K$, cf. n° 2.5, th. 3). En imposant à ce produit tensoriel des conditions raisonnables (en particulier $v(E \otimes F) \simeq v(E) \otimes v(F)$) on démontre alors qu'il provient d'une structure de *bigèbre* bien déterminée sur D; cette bigèbre a un élément unité si M contient un élément unité pour le produit tensoriel; elle a une inversion, si l'on se donne une opération «contragrédiente». (Au lieu de se donner le produit tensoriel et la contragrédiente, on peut aussi se donner un foncteur «Hom».)

Grothendieck a rencontré cette situation avec $K = \mathbf{Q}$, M = catégorie des *motifs* sur un corps de base k et v = foncteur «cohomologie à valeurs dans $\mathbf{Q}$» relativement à un plongement de k dans $\mathbf{C}$.]

3.4. Une interprétation des points de G

Soit $K_1 \in \mathrm{Alg}_K$ et soit $g \in G(K_1)$ un point de G à valeurs dans K_1. Pour tout $E \in \mathrm{Com}^f_C$, notons $g(E)$ l'image de g par l'antireprésentation

$$\rho(E): G(K_1) \to \mathrm{End}_E(K_1)\ .$$

On a donc $g(E) \in \mathrm{End}_E(K_1) = \mathrm{End}_{K_1}(K_1 \otimes E)$, et de plus:

(i) $g(K) = 1_{K_1}$

(ii) $g(E_1 \otimes E_2) = g(E_1) \otimes g(E_2)$.

Réciproquement:

Proposition 4. *Soit* $v_{K_1}: \mathrm{Com}^f_C \to \mathrm{Mod}_{K_1}$ *le foncteur qui associe à tout* $E \in \mathrm{Com}^f_C$ *le* K_1*-module* $K_1 \otimes E$. *Soit* $\varphi: v_{K_1} \to v_{K_1}$ *un endomorphisme de* v_{K_1} *vérifiant les relations* (i) *et* (ii) *ci-dessus. Il existe alors un élément unique* $g \in G(K_1)$ *tel que* $\varphi = g$.

D'après 3.2, l'application $G(K_1) \to \mathrm{End}(v_{K_1})$ est un antihomomorphisme de monoïdes. La prop. 4 donne donc:

Corollaire. *Le monoïde* $G(K_1)$ *est isomorphe à l'opposé du monoïde des endomorphismes de* v_{K_1} *vérifiant* (i) *et* (ii).

[C'est là un résultat analogue au *théorème de dualité de Tannaka*; on reviendra là-dessus plus loin.]