

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 39 (1993)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** GÈBRES  
**Autor:** Serre, Jean-Pierre  
**Kapitel:** 3.3. SOUS-BIGÈBRES  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-60413>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 3.3. SOUS-BIGÈBRES

(On suppose à nouveau que  $K$  est un corps.)

Soit  $C$  une bigèbre (vérifiant les conditions du n° 3.1), et soit  $L$  une sous-catégorie abélienne de  $\text{Com}_C^f$  vérifiant les conditions 1), 2), 3) du th. 2 du n° 2.4, i.e. provenant d'une sous-cogèbre  $D$  de  $C$ .

**PROPOSITION 2.** *Pour que  $D$  soit une sous-bigèbre de  $C$  contenant 1, il faut et il suffit que  $L$  soit stable par produit tensoriel et contienne le comodule unité  $K$ .*

La nécessité est triviale. Supposons donc que  $L$  soit stable par  $\otimes$  et contienne  $K$ . On sait (cf. n° 2.4) que  $D$  est réunion des cogèbres  $C_E$  attachées aux comodules  $E \in L$ . Le fait que  $D$  soit stable par le produit résultera donc du lemme suivant:

**LEMME 1.** *Si  $E$  et  $F$  sont des comodules de rang fini, on a*

$$(*) \quad C_{E \otimes F} = C_E \cdot C_F.$$

En effet, on vérifie tout de suite que  $C_E \otimes C_F$  est la sous-cogèbre de  $C \otimes C$  attachée au  $C \otimes C$ -comodule  $E \otimes F$ . Comme  $C_{E \otimes F}$  est l'image de cette dernière par  $m: C \otimes C \rightarrow C$ , c'est bien  $C_E \cdot C_F$ .

Le fait que  $D$  contienne 1 provient de ce que  $C_E = K \cdot 1$  si  $E = K$ .

**PROPOSITION 3.** *Supposons que  $C$  ait une inversion  $i$ . Pour que  $D$  soit stable par  $i$ , il faut et il suffit que  $L$  soit stable par le foncteur «contragrédiente».*

Cela résulte, comme ci-dessus, de la formule:

$$(**) \quad C_E^\vee = i(C_E).$$

**COROLLAIRE.** *Supposons que  $G = \text{Spec}(C)$  soit un schéma en groupes. Soit  $\text{Mod}_G^f$  la catégorie des  $G$ -modules de rang fini, et soit  $L$  une sous-catégorie abélienne de  $\text{Mod}_G^f$ . Pour qu'il existe un quotient  $H$  de  $G$  tel que  $L = \text{Mod}_H^f$ , il faut et il suffit que  $L$  vérifie les conditions 1), 2), 3) du th. 2 du n° 2.4, soit stable par les opérations «produit tensoriel» et «contragrédiente», et contienne le  $G$ -module unité  $K$ ; le groupe  $H$  en question est alors unique.*

Ce n'est qu'une reformulation des props. 2 et 3, étant entendu que «groupe quotient» est pris pour synonyme de «sous-bigèbre contenant 1». L'unicité de  $H$  provient du th. 2 du n° 2.4.

[Il y a un résultat plus général, dû sauf erreur à Grothendieck, et que le rédacteur a la flemme de rédiger en détail. Au lieu de se donner, comme ici, une sous-cogèbre d'une bigèbre, on se donne seulement une *cogèbre*  $D$  et une opération de «produit tensoriel» sur la catégorie  $M = \text{Com}_D^f$  correspondante (la donnée de  $D$  est d'ailleurs équivalente à celle du couple formé de  $M$  et du foncteur  $\nu: M \rightarrow \text{Vect}_K$ , cf. n° 2.5, th. 3). En imposant à ce produit tensoriel des conditions raisonnables (en particulier  $\nu(E \otimes F) \simeq \nu(E) \otimes \nu(F)$ ) on démontre alors qu'il provient d'une structure de *bigèbre* bien déterminée sur  $D$ ; cette bigèbre a un élément unité si  $M$  contient un élément unité pour le produit tensoriel; elle a une inversion, si l'on se donne une opération «contragrédiente». (Au lieu de se donner le produit tensoriel et la contragrédiente, on peut aussi se donner un foncteur «Hom».)

Grothendieck a rencontré cette situation avec  $K = \mathbf{Q}$ ,  $M =$  catégorie des *motifs* sur un corps de base  $k$  et  $\nu =$  foncteur «cohomologie à valeurs dans  $\mathbf{Q}$ » relativement à un plongement de  $k$  dans  $\mathbf{C}$ .]

### 3.4. UNE INTERPRÉTATION DES POINTS DE $G$

Soit  $K_1 \in \text{Alg}_K$  et soit  $g \in G(K_1)$  un point de  $G$  à valeurs dans  $K_1$ . Pour tout  $E \in \text{Com}_C^f$ , notons  $g(E)$  l'image de  $g$  par l'antireprésentation

$$\rho(E): G(K_1) \rightarrow \text{End}_E(K_1) .$$

On a donc  $g(E) \in \text{End}_E(K_1) = \text{End}_{K_1}(K_1 \otimes E)$ , et de plus:

- (i)  $g(K) = 1_{K_1}$
- (ii)  $g(E_1 \otimes E_2) = g(E_1) \otimes g(E_2)$ .

Réciproquement:

**PROPOSITION 4.** *Soit  $\nu_{K_1}: \text{Com}_C^f \rightarrow \text{Mod}_{K_1}$  le foncteur qui associe à tout  $E \in \text{Com}_C^f$  le  $K_1$ -module  $K_1 \otimes E$ . Soit  $\varphi: \nu_{K_1} \rightarrow \nu_{K_1}$  un endomorphisme de  $\nu_{K_1}$  vérifiant les relations (i) et (ii) ci-dessus. Il existe alors un élément unique  $g \in G(K_1)$  tel que  $\varphi = g$ .*

D'après 3.2, l'application  $G(K_1) \rightarrow \text{End}(\nu_{K_1})$  est un antihomomorphisme de monoïdes. La prop. 4 donne donc:

**COROLLAIRE.** *Le monoïde  $G(K_1)$  est isomorphe à l'opposé du monoïde des endomorphismes de  $\nu_{K_1}$  vérifiant (i) et (ii).*

[C'est là un résultat analogue au *théorème de dualité de Tannaka*; on reviendra là-dessus plus loin.]